巴克
[illegible]

概率论.

刘会刚: 邮箱: liuhg@nankai.edu.cn.

办公室: 时中2号楼122.

平时—交作业. 20%~30%　　4个学分

教材: 第四版　浙江大学　盛骤等编.

随机事件及其概率.

随机变量及其概率 * 大题

r.v的数字特征

大题

参数估计　　假设检验. (判断估计是否科学)

(总体中未知参数的估计). (对估计的值进行检验).

考研: 22%. 只考前8章. 5题 = 2×选择 + 1×填空 + 2×大题　33~34分.

No
Date

第一章 概率论的基本概念

确定性现象：条件完全决定结果

不确定性现象：条件不能完全决定结果.

随机试验通常用E表示

同有规律性：事物固有的.

随机试验的条件：1. 相同条件下可以重复进行

2. 可能的结果不止一个，试验前确定所有可能结果.

3. 试验之前不能确定结果.

一.样本空间.样本点.

随机试验E的所有可能结果组成的集合，称为E的样本空间，记为S.

可表示为 $\{e\}$, S.

eg: N → 正品, D → 次品. {NDD, NND · · · }.

概率为0的事件有可能发生.

电子产品的寿命服从指数分布，对之前的使用情况没有记忆性.

说明:1.试验不同，样本空间也不同.

2. 同一试验，若试验目的不同，则对应的样本空间也不同.

3. 建立样本空间，事实上就是建立随机现象的数学模型.

描述随机现象的第一步就是建立样本空间

二.随机事件.

必然事件：随机试验中必然会出现的结果，与不可能事件互为对立事件.

eg: 样本空间 S.

说明: 1. 用大写字母表示事件.

2. 随机事件 —— 样本空间 $\xrightarrow{子集}$ 随机事件.

随机事件 { 基本事件

复合事件.

必然事件

不可能事件.

三.关系.运算

1. $A \subset B$. 2. $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$. 3. $A \cup B$.

29Lines, 8mm

运算顺序：先交并，再和差（求逆优先）.

互斥事件的并集也称为和为S.

$A-B = A\bar{B} = A-AB$

互逆 = 对立.

$A\cup B$：A, B 至少有一个发生.

频率与概率.

频率：波动性．随n增大，频率呈现稳定性．这个稳定值从本质上反映了事件发生的可能性.

可列可加性 ⇒ 有限可加性

$P(B-A) = P(B) - P(AB)$

等可能概型：

只包含有限个元素.

无限个元素的是几何概型.

超几何分布：

$P = C_D^k C_{N-D}^{n-k} / C_N^n$.

实际推断原理：小概率事件在一次实验中应该不会发生.（假设检验）

几何概型：

当随机试验的样本空间是某个区域，并且任意一点落在度量（长度，面积，体积）相同的子区域是等可能的.

会面问题.

条件概率.

A, B两个事件，且$P(A)>0$，称 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件A发生的条件下事件B发生的条件概率. 缺一不可.

性质：

$P(A_1\cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B)$.

$P(AB)>0 \Rightarrow P(ABC) = P(C|AB)P(A|B)P(B)$.

$AB\subset B \Rightarrow P(B)>0$.

全概率公式与贝叶斯公式.

样本空间的划分：（完备事件组）.

No
Date

S为样本空间, $B_1, B_2, \cdots B_n$ 为S的一组事件.

$B_iB_j = \varphi$, $i = 1, 2, 3 \cdots n$.

$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_i = S$.

独立性

- $P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
- 事件A与事件B相互独立,是指事件A的发生对事件B发生的概率无影响,
  若 $P(A)>0$, $P(B)>0$. A与B独立与A,B互不相容不能同时成立.
- 三事件两两独立: $\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{cases}$

  三个事件相互独立 = $\begin{cases} P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \\ \text{三事件两两独立} \end{cases}$

- 定理1. $P(A)>0$, $P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
- 定理2: $\bar{A}$与$\bar{B}$, A与$\bar{B}$, $\bar{A}$与B 相互独立.

eg: 伯恩斯坦反例

两两独立,但三个事件并不相互独立.

No
Date

第二章 随机变量及其分布

一. 随机变量的引入.

把一些非数量表示的随机事件用数字来表示.

恒等变换. $X(e)=$

二. 随机变量的概念.

样本空间 $S=\{e\}$. $X=X(e)$ 是定义在样本空间上的单值实值函数, 称 $X=X(e)$ 为随机变量.

eg: 抓阄核验, 再次取时不独立.

{ 离散型
{ 非离散型 { 连续型
           { 其它.

三. 常见离散型随机变量的概率分布.

(1) (0-1) 分布.

$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$. $k=0,1$. $(0<p<1)$.

(2) 伯努利试验, 二项分布.

只有两个结果 A, 此类实验称为伯努利实验.

$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$. $(0\le k\le n)$.

记 $q=1-k$. $P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$.

$X\sim b(n,p)$. $n=1$ 时, 为两点分布.

解题时要在后说明 k 的取值.

结果的实际意义. 实际推断原理.

(3) 泊松分布.

X 取值 $0,1,2\cdots$ $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $X\sim\pi(\lambda)$.

$np\to\lambda$ $(n\to+\infty)$. $b\approx\pi$.

泊松定理.

$\lambda>0$. n 为正整数, $np_n=\lambda$. $(n\to+\infty)$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

p很小.

四. 随机变量分布函数.

$P\{x_1<X\le x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$

No
Date

设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，函数 $F(x)=P\{X\le x\}$，$-\infty<x<\infty$

称为 X 的分布函数.

求分布函数时要对 x 在整个实数域内讨论取值.

性质：1°. $F(x)$ 是一个不减函数.

2°. $0\le F(x)\le 1$. $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

3°. $F(x+0)=F(x)$，即 $F(x)$ 是右连续的.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ p_1, & 0\le x<x_1\\ p_2, & x_1\le x<x_2\\ 1, & x\ge x_2\end{cases}$$

$P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a)$.

$P\{X>a\}=1-F(a)$.

不同的随机变量，它们的分布函数可能相同.

注：概率密度.

对于 $F(x)$，存在非负可积函数 $f(x)$，使对任意函数 x 有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$，则

称 $f(x)$ 为 $F(x)$ 的概率密度.

PS：课本 P46. 第二节补充.

下面介绍一个用泊松分布来逼近二项分布的定理.

泊松定理　设 $\lambda>0$ 是一个常数，n 是任意正整数，设 $np_n=\lambda$，则对于任一固定的非负整数 k，有

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

证　由 $p_n=\frac{\lambda}{n}$，有

$$\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$
$$=\frac{\lambda^k}{k!}\left[1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

对任意固定的 k，当 $n\to\infty$ 时

$$1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\to1,\quad\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\to e^{-\lambda},\quad\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\to1.$$

故有 $\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

定理的条件 $np_n=\lambda$（常数）意味着当n很大时p_n必定很小，因此，上述定理表明当n很大，p很小（$np=\lambda$）时有以下近似式

$$\binom{n}{p}p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\text{（其中}\lambda=np\text{）}. \quad (2.7)$$

也就是说以n，p为参数的二项分布的概率值可以由参数为$\lambda=np$的泊松分布的概率值近似。上式也能用来作二项分布概率的近似计算。

例 计算机硬件公司制造某种特殊型号的微型芯片，次品率达0.1%，各芯片成为次品相互独立。求在1000只产品中至少有2只次品的概率。以X记产品中的次品数，$X\sim b(1000,0.001)$.

解 所求概率为

$$p\{X\geq 2\}=1-p\{X=0\}-p\{X=1\}$$
$$=1-(0.999)^{1000}-\binom{1000}{1}(0.999)^{999}(0.001)$$
$$\approx 1-0.3676954-0.3680635\approx 0.2642411.$$

利用(2.7)式来计算得，$\lambda=1000\times 0.001=1$.

$$p\{X\geq 2\}=1-p\{X=0\}-p\{X=1\}$$
$$=1-e^{-1}-e^{-1}\approx 0.2642411.$$

显然利用(2.7)式的计算来得方便。一般，当$n\geq 20$，$p\leq 0.05$时，用$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$（$\lambda=np$）作为$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$的近似值效果颇佳。

概率密度.

性质：1°. $f(x)\geq 0$.

2°. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=1$.

3°. 对于任意 x_1,x_2（$x_1\leq x_2$） $p\{x_1<X\leq x_2\}=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx$.

4°. $F'(x)=f(x)$，若$f(x)$在x处连续.

同时，$p\{X\leq a\}=\int_{-\infty}^{a}f(x)\,dx$.

$p\{X>a\}=\int_{a}^{\infty}f(x)\,dx$.

对于任意指定值a 连续型随机变量取a的概率为0. 即 $p\{X=a\}=0$.

$p\{a\leq X\leq b\}=p\{a<X\leq b\}=p\{a\leq X<b\}=p\{a<X<b\}$.

连续型随机变量落在某区间的概率与端点无关

若 $p\{X=a\}=0$，则不能确定$\{X=a\}$是不可能事件。（连续型随机变量）

常见连续型随机变量的概率分布

1. 均匀分布. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其他\end{cases}$ $X\sim U(a,b)$.

落在区间 (a,b) 中任意等长度的子区间内的可能性相同.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$

2. 指数分布.

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 常数.

$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$ "无记忆性".

对于任意 $s,t>0$, 有

$$P\{X>s+t \mid X>s\}=P\{X>t\}.$$

3. 正态分布(高斯分布)

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty<x<+\infty$. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}$

标准正态分布. $\mu=0$ $\sigma=1$.

记其概率密度 $\varphi(x)$, 分布函数 $\Phi(x)$.

$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

引理. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

离散型随机变量的函数的分布

X 离散 => Y 离散.

连续型随机变量的函数的分布.

例: $Y=2X+8$. $f_X(x)=\begin{cases}\frac{x}{8}, & 0<x<4\\ 0, & 其他\end{cases}$ 求 $f_Y(y)$.

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+8\le y\}=P\{X\le \frac{1}{2}(y-8)\}=F_X(\frac{1}{2}(y-8))$

$f_Y(y)=[F_Y(y)]'=f_X(\frac{1}{2}(y-8))\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}(y-8)=\frac{1}{32}(y-8)$

$0<\frac{1}{2}(y-8)<4 \Rightarrow 8<y<16$.

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

称Y服从自由度为1的χ^2分布

No
Date

第三章 多维随机变量

二维随机变量

E为随机试验，样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X=X(e)$，$Y=Y(e)$ 是定义在S上的随机变量，由它们构成的一个向量 (X,Y)，叫作二维随机变量。

二维随机变量 (X,Y) 的性质不仅与X，Y有关，还依赖于这两个随机变量的相互关系。

分布函数（随机变量X和Y联合分布函数）

对于 $\forall x,y$，二元函数 $F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\stackrel{记成}{=}P\{X\le x,Y\le y\}$.

$P\{x_1< X\le x_2,\ y_1< y\le y_2\}$

$=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$.

性质：

1°. $F(x,y)$ 是变量 x,y 的不减函数.

2°. $0\le F(x,y)\le 1$. $F(-\infty,y)=0$, $F(x,-\infty)=0$. $F(-\infty,-\infty)=0$. $F(+\infty,+\infty)=1$.

3°. $F(x+0,y)=F(x,y)$. $F(x,y+0)=F(x,y)$.

4°. $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)$. $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0$.

二维离散型随机变量

分布律（联合分布律）

条件概率

二维连续型随机变量

性质：

1°. $P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$.

2°. $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$.

$f(x,y)$ 在 (x,y) 连续，$\Delta x,\Delta y$ 很小时，$P\{x<X\le x+\Delta x,\ y<Y\le y+\Delta y\}=f(x,y)\Delta x\Delta y$.

两个常用分布：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S}, & (x,y)\in D\\ 0, & 其他\end{cases}\qquad (均匀分布)$$

二维正态分布

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}.$$

n维随机变量

n维随机向量.

29 Lines, 8mm

边缘分布

$P\{X\le x\} = P\{X\le x, Y<\infty\} = F_X(x)$.

边缘分布函数

$F_X(x) = F(x, \infty)$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$. (标准正态分布) $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} = \sqrt{2\pi}$.

边缘分布为正态分布的函数,联合分布不一定为正态分布.

条件分布

离散型随机变量的条件分布

设 (X,Y) 是二维随机变量. 分布律 $P\{X=x_i, Y=y_j\} = p_{ij}$ $i,j = 1,2\cdots$

边缘分布为 $P\{X=x_i\} = p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$, $i=1,2\cdots$

$P\{Y=y_j\} = p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$, $j=1,2\cdots$

设 $p_{\cdot j}>0$. 现考虑 $\{Y=y_j\}$ 已发生的条件下 $\{X=x_i\}$ 发生的概率 $P\{X=x_i|Y=y_j\}$.

$$P\{X=x_i|Y=y_j\} = \frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

性质: $\therefore \sum_{i=1}^{n} P\{X=x_i|Y=y_j\} = 1$.

$P\{X=x_i|Y=y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$ 为在 $Y=y_j$ 发生的条件下 X 的条件分布律.

连续型随机变量的条件分布

条件概率密度. $f(x,y)$. $f_Y(x,y)$. 对于固定的 y. $f_Y(y)>0$.

则称 $\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y=y$ 发生的条件下 X 的条件概率密度,

记为 $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

称 $\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$ 为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件分布函数

记为 $P\{X\le x|Y=y\}$ 或 $F_{X|Y}(x|y)$.

$f_{X|Y}(x,y) = \frac{d}{dx}F_{X|Y}(x,y)$.

$F_{X|Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$.

联合分布 ↗ 边缘分布 ↘ 条件分布 } → 联合分布.

$f_{X|Y}(x|y)$, $f_Y(y) \Rightarrow f(x,y)$. 定义域 求交集.

相互独立的随机变量

对于所有的 x, y, $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$.

性质. 1. $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ $\Leftrightarrow$ X, Y 相互独立,

No
Date

2°. X, Y 相互独立, 则 f(X) 和 g(Y) 也相互独立.

3°. $P\{X=x_i, Y=y_j\} = P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$.

二维正态随机变量 (X, Y), X 和 Y 相互独立的充要条件是参数 $\rho = 0$

推广: 设 $(X_1, X_2, \cdots X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots Y_n)$ 相互独立, 则 $X_i (i=1,2,\cdots m)$ 和
$Y_j (j=1,2,\cdots n)$ 相互独立.

两个随机变量的函数的分布.

离散型.

连续型.

一. (X, Y) 是二维连续型随机变量, 其概率密度 $f(x,y)$. $Z = X+Y$ 仍为连续随机变量.

其概率密度 $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)\,dy$

或 $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,dx$

X, Y 相互独立. $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)\cdot f_Y(y)\,dy$.

$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\,dx$

称为 f_X 和 f_Y 的卷积公式, 记为 $f(x) * f(y)$.

一般, 设 X, Y 相互独立且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. 则 $Z = X+Y$, $Z \sim N(\mu_1+\mu_2,$
$\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

二. $Z = \frac{Y}{X}$, $Z = XY$.

$f_{\frac{Y}{X}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x, xz)\,dx$

$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x})\,dx$.

三. $M = \max\{X, Y\}$. $N = \min\{X, Y\}$.

$P\{M \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\} = P\{X \le z\}P\{Y \le z\}$.

$F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z)$.

$P\{N \le z\} = 1 - P\{N > z\} = 1 - P\{X > z, Y > z\} = 1 - P\{X > z\}P\{Y > z\}$

$= 1 - (1-F_X(z))(1-F_Y(z))$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}$. *

29 Lines, 8mm

No
Date

第四章 随机变量的数字特征

分布函数能完整地描述随机变量的统计特征.

* 数学期望, 方差, 协方差和相关系数.

§1. 数学期望

一. 设 X 是离散型随机变量, 它的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛, 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量 X 的数学期望, 记为 E(X)

即 $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$.

1. E(X) 是一个实数, 而非变量. 是一种加权平均. 称它为均值.

2. 级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变.

$X\sim \pi(\lambda)$, $E(X)=\lambda$. $\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=e^{\lambda}\right)$.

$X\sim b(n,p)$. $E(X)=np$.

二. 连续型随机变量.

$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$ 绝对收敛. $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$

三. 随机变量函数的数学期望.

离散型: $E(Y)=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$.

$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$.

二维连续型: $E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)g(x,y)dxdy$.

离散型: $E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dxdy$.

P3: 课本 P101. 第四节补充.

(三). $Z=\frac{Y}{X}$ 的分布, $Z=XY$ 的分布.

设 (X, Y) 是二维连续型随机变量, 它具有概率密度 $f(x,y)$, 则 $Z=\frac{Y}{X}$, $Z=XY$ 仍为连续型随机变量, 其概率密度分别为

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x,xz)dx, \qquad (5.7)$$

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx. \qquad (5.8)$$

又若 X 和 Y 相互独立, 设 (X, Y) 关于 X, Y 的边缘密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$, 则 (5.7) 式化为

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f_X(x)f_Y(xz)dx. \qquad (5.9)$$

而 (5.8) 式化为

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)dx. \qquad (5.10)$$

29Lines, 8mm

No
Date

5.2 方差

$E\{[X-E(X)]^2\}$ 来度量偏离程度.

一. 定义.

设 X 是一个随机变量, 若 $E[X-E(X)]^2$ 存在, 称 $E[X-E(X)]^2$ 为 X 的方差. 记为 $D(X)$ 或 $Var(X)$. 即,

$$D(X)=E[X-E(X)]^2=Var(X).$$

标准差 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

刻画了随机变量的取值与其数学期望的离散程度.

二. 方差的计算.

$$D(X)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k & \text{离散型} \\ \int_{-\infty}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 f(x)\,dx. & \text{连续型.}\end{cases}$$

简化公式: $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

$X\sim(0-1)$ 分布 $D(X)=p(1-p)$.

$X\sim\pi(\lambda)$ 分布. $D(X)=\lambda=E(X)$.

$X\sim U(a,b)$. $D(X)=\frac{1}{12}(b-a)^2$. $E(X)=\frac{1}{2}(a+b)$.

$X\sim$ 指数分布 (θ). $E(X)=\theta$, $D(X)=\theta^2$.

三. 性质.

1. C 为常数, $D(C)=0$.
2. X 随机变量, C 是常数. $D(CX)=C^2D(X)$

$f_{X/Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f_X(x)f_Y(xz)\,dx.$ (5.9)

而 (5.8) 式化为

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)dx. \quad (5.10)$$

29Lines 8mm

分布函数的数学期…
* 数学期望, 方差…

一. 设X是离散型…
离散型 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ …
即 $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ …
1. E(X) 是一个…
2. 级数的绝对收敛…
$X\sim\pi(\lambda)$, $E(X)$ …
$X\sim B(n,p)$ …
二. 连续型随机变量…
$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$ …
三. 随机变量函数…
离散型: E(…

二维连续型随机…
离散型…
P3: 课本 P101…
(三). $Z=\frac{Y}{X}$ 的…
设 (X, Y…
为连续型随机…

$D(aX+b)=a^2D(X)$. a, b 为常数.

3. X 和 Y 是两个随机变量, 则
$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$.
若 X, Y 相互独立, 则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$
$E(XY)=E(X)E(Y)$

4. $D(X)=0 \iff P\{X=C\}=1$, 其中 $C=E(X)$

若 $X\sim B(n,p)$, $E(X)=np$, $D(X)=np(1-p)$.
若 $X\sim N(0,1)$, $E(X)=0$, $D(X)=1$.
$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$.
若 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ $i=1,2,\cdots n$ 相互独立
则它们的线性组合 $C_1X_1+C_2X_2+\cdots+C_nX_n$ ($C_1,C_2\cdots C_n$ 不全为0),
$C_1X_1+C_2X_2+\cdots+C_nX_n\sim N(\sum_{i=1}^{n} c_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} c_i^2\sigma_i^2)$.

切比雪夫不等式
$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

又若X和Y … 式
化为

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f_X(x)f_Y(xz)\,dx. \qquad (5.9)$$

而(5.8)式化为

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)dx. \qquad (5.10)$$

证：$Z=Y/X$ 的分布函数为（如图 3-12）

$$F_{Y/X}(z)=P\{Y/X\le z\}=\iint_{G_1\cup G_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\iint_{y/x\le z,\,x<0} f(x,y)\,dy\,dx+\iint_{y/x\le z,\,x>0} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{zx}^{\infty} f(x,y)\,dy\right]dx+\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{zx} f(x,y)\,dy\right]dx$$

$$\xlongequal{\text{令 } y=xu}\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{z}^{-\infty} x f(x,xu)\,du\right]dx+\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} x f(x,xu)\,du\right]dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{-\infty}^{z}(-x) f(x,xu)\,du\right]dx+\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} x f(x,xu)\,du\right]dx.$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z}|x| f(x,xu)\,du\right]dx$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|x| f(x,xu)\,dx\right]du.$$

由概率密度的定义即得 (5.7) 式.

类似地，可求出 $f_{XY}(z)$ 的概率密度为 (5.8) 式.

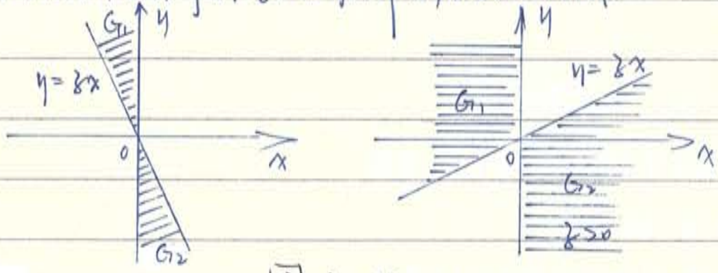


图 3-12

例4 某公司提供一种地震保险，保险费 Y 的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}\frac{y}{25}e^{-\frac{y}{5}}, & y>0\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

保险赔付 X 的概率密度为

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x>0\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

设 X 与 Y 相互独立，求 $Z=Y/X$ 的概率密度.

解 由 (5.7) 式知，当 $z<0$ 时，$f_Z(z)=0$. 当 $z>0$ 时，Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_0^{\infty} x\cdot\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}\cdot\frac{xz}{25}e^{-\frac{xz}{5}}\,dx=\frac{z}{125}\int_0^{\infty}x^2e^{-x\left(\frac{1+z}{5}\right)}\,dx$$

$$=\frac{z}{125}\cdot\frac{\Gamma(3)}{[(1+z)/5]^3}=\frac{2z}{(1+z)^3}.$$

§ 协方差和相关系数.

一. 协方差.

1. $Cov(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$.

2. 性质: $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

$Cov(aX, bY) = ab\,Cov(X,Y)$

$Cov(X_1+X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$.

3. 公式. $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

若 X 和 Y 相互独立. 则 $Cov(X,Y) = 0$.

esp, $Cov(X,X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = D(X)$.

4. 和的方差与协方差的关系: $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X,Y)$.

二. 相关系数. (标准化)

1. $D(X) > 0$, $D(Y) > 0$. $\rho_{XY} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$.

2. 意义: $|\rho_{XY}|$ 较大时, 表明 X, Y 的线性联系较紧密.

$\rho_{XY} = 0$ 时, X, Y 不相关.

3. 相互独立 $\xrightarrow{\quad}$ 不相关 (X, Y 间不存在线性关系)

不相关的充要条件: (1) $\rho_{XY} = 0$

(2) $Cov(X,Y) = 0$.

(3) $E(XY) = E(X)E(Y)$

4. 性质: (1) $|\rho_{XY}| \le 1$

(2) $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow \exists\, a, b$, 使 $P\{Y = aX + b\} = 1$.

$|\rho_{XY}| = 1 \Rightarrow E[(Y - (a_0 + b_0X))^2] = 0$.

协方差矩阵.

第五章 大数定律及中心极限定理.

样本均值作为总体期望的估计.
事件发生的频率作为该事件的概率的估计. } 大数定律.

§1. 大数定律.

定理中 {$|X_i-\mu|<\varepsilon$} 是一个随机事件.
以后就可以用样本均值近似代替.

第六章 样本的抽样分布.

分类
- 描述统计学:
  对随机现象进行观测,试验,以取得代表性的观测值.
- 推断统计学:
  对已取得的观测值进行整理,分析,作出推断,决策,找出所研究对象的规律性

推断统计学
- 参数估计
- 假设检验
- 方差分析
- ......

数理统计:研究怎样以有效的方式收集和使用带随机性的数据.

不含未知参数的样本函数称为统计量.

样本平均值: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

样本方差: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$.

抽样分布:

$x_1, x_2 \cdots x_n$ 独立同分布. $x_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. $\quad X = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

$X \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$P(X > z_\alpha) = \alpha$. $\quad P(|X| > z_{\alpha/2}) = \alpha$.

双侧上α分位点.

χ^2 分布.

$x_i \sim N(0,1)$. $\quad \chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. 自由度 n. $\quad \chi^2 \sim \chi^2(n)$.

$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$.

性质:设 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 相互独立. $x_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$.

$E(\chi^2) = n$. $\quad D(\chi^2) = 2n$.

第七章 参数估计

无偏性: $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots X_n)$. $E(\hat{\theta}) = \theta$.

有效性: $D(\hat{\theta}_1 - \theta)^2 \le D(\hat{\theta}_2 - \theta)^2$.

相合性: $\forall \varepsilon > 0$, 有 $\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 1$, $\theta \in \Theta$

区间估计:

可靠度 — 精度.

置信区间

σ 已知, $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

σ 未知, $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n)$.

只需找到 a 和 b, 只要它们的概率对称包含中间下方95%的面积, 就确定为一个置信区间

不过是对称时, 则找到对称的估计值和置信区间.

正态总体的均值与方差的区间估计.

$E(t) = 0$, $D(t) = n/(n-2)$.

第八章 假设检验

假设检验 { 参数检验 { 均值 / 方差比；非参数检验

总体分布已知，检验关于未知参数的某个假设。

H_0：原假设（零假设）　备择假设 H_1

小概率在一次试验中基本不会发生，显著性水平 α

W：$|Z|>z_{\alpha/2}$，拒绝域

1. 显著性水平 $\alpha \to k$

$|Z|=\left|\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>k$，差异显著　$|Z|=\left|\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<k$，差异不显著

2. 在显著性水平 α 下，针对 H_0，对 H_1 进行检验

3. 第一类错误　弃真错误　概率 α

取伪错误

只在知道分布才能计算概率

先检验 $\sigma_x=\sigma_y$，即方差齐性，若 $\sigma_x\neq\sigma_y$，则有显著差异。

若 $\sigma_x=\sigma_y$，再检验 $\bar{x}=\bar{y}$。

对同一数据做法不同，得到的结果也不同。

{ 不能否定假设
{ 不能肯定假设

根本原因：概率论有相对性。

第十章. 随机过程

有限维分布函数族完全确定了随机过程的数字特征.

自相关函数 $R_{XX}(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$.

协方差函数 $C_{XX}(t_1,t_2) = Cov[t_1,t_2] = E[(X(t_1)-\mu_X(t_1))(X(t_2)-\mu_X(t_2))]$.

均方值函数 $\psi_X^2(t) = E[X^2(t)]$.

No
Date

实验室 车床，刨削，电焊，焊接 A701.

孙桂玲 sgl@nankai.edu.cn
135 1223 3718

计算方法.

计算原理
绪论 第一章.

一. 研究对象

数值解法 $\left\{ \begin{array}{l} \text{1. 方法的构造.} \\ \text{2. 理论分析.} \end{array} \right.$

实际问题 → 数学模型 → 构造算法程序 → 程序框图

选择好的数值计算方法.

考试类型: 计算题 (算法+程序) 70%

简答题

二. 计算方法的特点.

模拟量 → 数字量

1. 采用"离散化"方法　分成很小的段, 再求和.
2. 采用"递推化"方法

基本思想: 将一个复杂的计算过程归结为简单过程的多次重复.

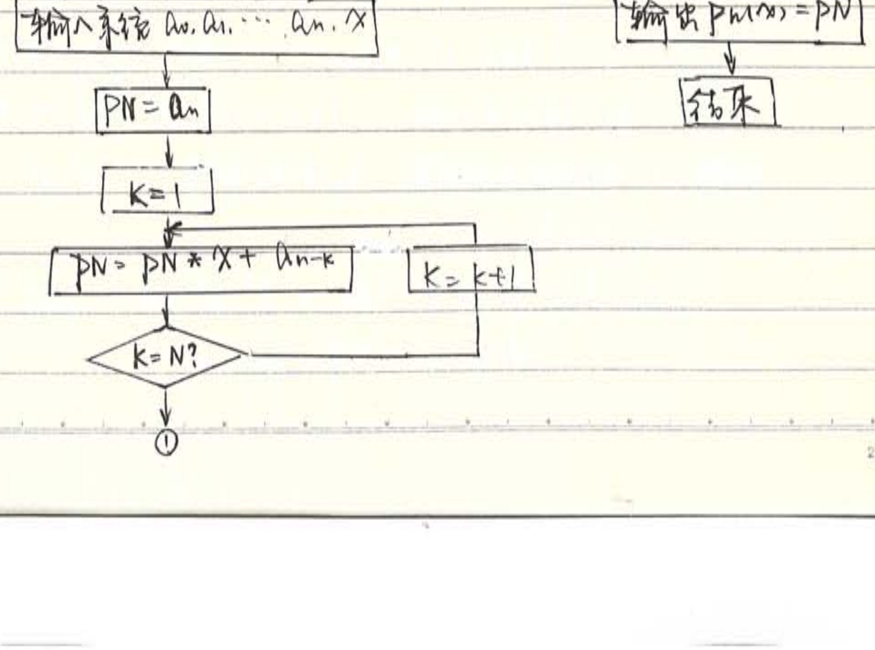
eg1-1. 对于给定的 x, 计算多项式 $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

乘法: $\frac{1}{2} n(n+1)$ 次. 加法: n 次

解: 递推公式 $\left\{ \begin{array}{l} P_0 = a_n \\ P_k = P_{k-1} x + a_{n-k} \end{array} \right.$

乘法 n 次, 加法 n 次.

程序框图:



No
Date

3. 采用"近似替代"方法.

eg 1-2. 计算自然对数 e 的近似值.

解: $e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$

令 $x=1$, 有 $e=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$

取 $e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

三. 误差及有关概念.

误差: 一个物理量的真实值与计算值之间的误差.

1. 模型误差: 数学模型的解与实际问题的解之间存在的误差. 不可避免的

2. 观测误差: 观察和实验值与真实值之间的误差. 提高仪器精度.

3. 截断误差(方法误差): 模型的精确解与数值方法的精确值之间的误差.

4. 舍入误差: 在计算过程中对数进行舍入而引起的误差.

5. 绝对误差: 近似值与真实值之间的差值.

相对误差: 绝对误差/真值.

四. 数值计算中应注意的问题.

1. 要使用数值稳定的算法

算法: 用"+""−""×""÷"等基本运算按规定的运算顺序所构成的完整的解题步骤.

数值稳定: 运算过程中舍入误差不增长的公式.

eg 1-3. 计算 $I_n=\int_0^1 x^n e^{x-1}dx$, $n=1,2,3\cdots$

解法I: $I_n=\int_0^1 x^n de^{x-1}=x^n e^{x-1}\big|_0^1-\int_0^1 e^{x-1}dx^n$

精确解 $=1-n\int_0^1 x^{n-1}e^{x-1}dx=1-nI_{n-1}$

递推公式: $\begin{cases} I_1=\int_0^1 xe^{x-1}dx=\int_0^1 x\,de^{x-1}=xe^{x-1}\big|_0^1-\int_0^1 e^{x-1}dx \\ \quad =1-e^{x-1}\big|_0^1=1-1+\frac{1}{e}=\frac{1}{e} \\ I_n=1-nI_{n-1} \end{cases}$ 每次计算, 误差增大n倍 $(\times n)$

$\Rightarrow I_7=0.2160$, $I_8=-0.7280$, $I_9=7.5520$.

分析: (1) 无论n取何值, I_n 均为正值. $x^n>0$, $e^{x-1}>0$.

(2) $0<I_n<1$

(3) $I_n=\int_0^1 x^n e^{x-1}dx\le\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$. ($0<x<1\Rightarrow\frac{1}{e}<e^{x-1}<1$)

当 $n\to\infty$ 时, $I_n\to 0$.

29 Lines, 6mm

No
Date

解法Ⅱ：(正解) $\begin{cases} I_{20}=0.000\cdots \\ I_{n-1}=\frac{1}{n}(1-I_n). \end{cases}$ 那么计算,误差减小 n 倍.($\times\frac{1}{n}$)

2. 要避免两个相近的数相减法运算 —— 易丢失有效数位.
解决方法:进行恒等变换: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$\ln(x+1)-\ln x=\ln\frac{x+1}{x}$.
$\sin(x+\varepsilon)-\sin x=2\cos(x+\frac{\varepsilon}{2})\sin\frac{\varepsilon}{2}$. ($\varepsilon$很小).

3. 在运算过程中必须注意合理安排运算顺序,以便提高运算的精度.
4. 不能用太小的数作除数,否则商的绝对误差会很大. 溢出
5. 要注意计算步骤的简化. eg: x^{255} 方一:做255次乘法
方二: $x^2\to(x^2)^2\cdots$ 减少运算次数,减少步骤.

评价一个数值方法较好的标准:
① 计算量少或计算时间短.
② 精度高.
③ 在计算过程中,占有的计算机存储单元和工作单元少.

第二章 插值法

§2-1. 插值问题的提出

$y=f(x) \approx p(x)$

$y_i=f(x_i)$. $i=0,1,2,\cdots,n$

x_i	x_0, x_1, $\cdots$ x_n
y_i	y_0, y_1, $\cdots$ y_n

插值：在所给定的函数表中间，再插入一些所需的函数值.

用 $y=p(x)$ 近似替代 $y=f(x)$ 求值. $p(x)$ 多项式.

代数插值. 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，且已知在 $a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$ 上的函数值 $y_0,y_1,\cdots,y_n$. 若存在一个次数不超过 n 的多项式 $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$（其中，$a_i$ 为实数）满足条件 $p(x_i)=f(x_i)=y_i$ $(i=0,1,2\cdots,n)$ 则称 $p(x)$ 为函数 $f(x)$ 的 n 次代数插值多项式.

求 $(n+1)$ 个 a_i.

术语：插值法 —— 求插值多项式 $p(x)$ 的方法.

插值节点 —— 点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$.

被插函数 —— 函数 $f(x)$.（真实值）

插值条件：$p(x_i)=f(x_i)=y_i$ $(i=0,1,2,\cdots n)$

插值区间：$[a,b]$.

插值点：点 x

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=y_1 \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=y_n. \end{cases}$$

$a_0=\frac{\Delta_1}{\Delta}$. Δ：系数行列式. $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2\cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2\cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2\cdots & x_n^n \end{vmatrix}$ 知.

有唯一解.

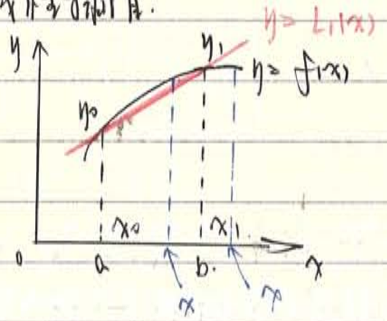
定理：

满足 $p_n(x_i)=y_i$，$i=0,1,2\cdots,n$ 的插值多项式是唯一的.

§2-2. 拉格朗日(Lagrange)插值.

一. Lagrange 插值多项式.

1. 线性插值.



$$L_1(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

$$* =\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

$$* \quad L_1(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1.$$

一次 Lagrange 插值基函数.

$l_0(x)+l_1(x)=1.$

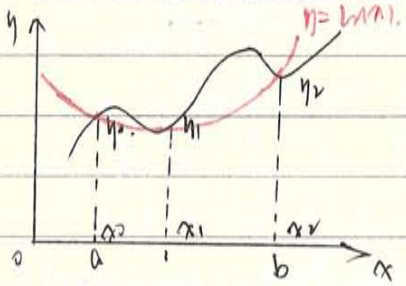
$l_0(x_0)=1$，$l_0(x_1)=0.$

$l_1(x_0)=0.$ $l_1(x_1)=1.$

内插：且 x 位于 $[a,b]$ 内.

外插：且 x 位于 $[a,b]$ 外.

2. 二次(抛物线)插值.



$$L_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2.$$

$$L_2(x)=L_1(x)+a(x-x_0)(x-x_1)$$

$$=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)+a(x-x_0)(x-x_1)$$

$L_2(x_0)=y_0$，$L_2(x_1)=y_1$.

满足 $L_2(x_2)=y_2$，代入，得 $a=\dfrac{\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}$ 代入 $L_2(x)$，有

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2.$$

抛物线插值公式. $=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2.$

二次 Lagrange 插值基函数.

例2-1. 已知 $\ln 11 = 2.3979$. $\ln 12 = 2.4849$. $\ln 13 = 2.5649$.

试分别用线性和抛物线插值求 $\ln 11.75$ 的近似值.

线性插值:

取 $x_0 = 11$, $x_1 = 12$.

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

$$= (x-12)\,2.3979 - (x-11) \times 2.4849$$

$$= 0.25 \times 2.3979 + 0.75 \times 2.4849 = 2.46315.$$

二次插值.

取 $x_0 = 11$, $x_1 = 12$, $x_2 = 13$.

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2.$$

$$= \frac{-0.25 \times (-1.25)}{2} \times 2.3979 + \frac{0.75 \times (-1.25)}{-1} \times 2.4849 + \frac{0.75 \times (-0.25)}{2} \times 2.5649$$

$$= 2.46380625$$

3. n次插值.

*
$$L_n(x) = l_0(x) y_0 + l_1(x) y_1 + \cdots + l_n(x) y_n = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) y_i$$
$$= \sum_{i=0}^{n} l_i(x) y_i.$$

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

eg 2-2.

已知函数 $y = f(x)$ 的观测数据如下表.

x	1	2	3	4
y	0	-5	-6	3

试构造 $f(x)$ 的三次 Lagrange 插值多项式,并计算 $f(1.5)$ 处的函数值.

取 $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$.

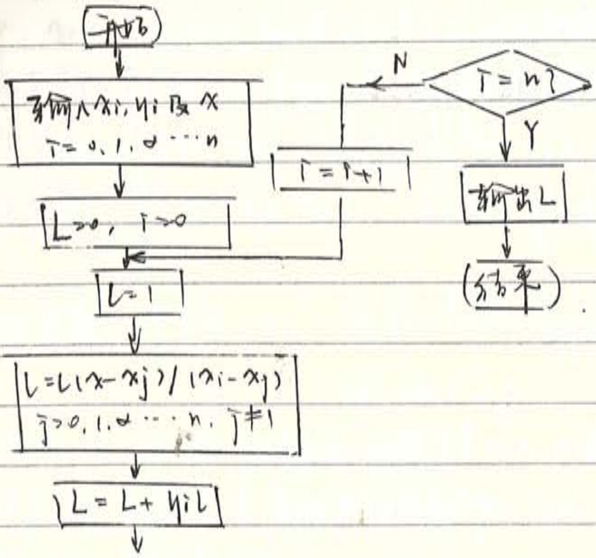
$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3.$$

$$= x^3 - 4x^2 + 3.$$

$$f(1.5) \approx L_3(1.5) \approx 2.125.$$

4. 埃尔米特插值.

$$y = f(x) \approx P(x).$$



二. Lagrange 插值多项式的余项.

$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$

定理：设 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在，$L_n(x)$ 是函数在 $[a,b]$ 上的 $n+1$ 个互异节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的插值多项式，则对任给定的 $x \in [a,b]$，插值余项为 $R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$，$\xi \in (a,b)$ 且依赖于 x. * 插值

$R_n(x_i) \equiv 0 \quad i=0,1,2\cdots n.$ 　　唯一的

例 2-3. 已知 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ 的正弦函数值分别为 $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$. 求 $\sin x$ 的一次和二次插值多项式 和 $\sin 50°$ 的值，并估计所得结果的误差？

一次：取 $x_0 = \frac{\pi}{4},\ x_1 = \frac{\pi}{3}$.

$$L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1 = \frac{x-\frac{\pi}{3}}{-\frac{\pi}{12}}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{x-\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{12}}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{\pi}\left[(\sqrt{3}-\sqrt{2})x - \frac{\sqrt{3}}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}}{3}\pi\right]$$

$\sin 50° = L_1(\frac{5}{18}\pi) = 0.76008$.

$R_1(x) = -\frac{\sin\xi}{2}(x-x_0)(x-x_1) = 0.007615\sin\xi$.

$\xi \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$. $\Rightarrow 0.00538 < R_1(50°) < 0.00659$.

二次：$L_2(x) = 3.647563(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3}) - 10.316865(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3}) + 6.317764(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})$

$\sin 50° = L_2(\frac{5\pi}{18}) = 0.76543$.

$R_2(x) = -\frac{\cos\xi}{6}(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3}) = 0.000883\cos\xi$.

$\xi \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$. $\Rightarrow 0.00044 < R_2(\frac{5}{18}\pi) < 0.00077$.

No
Date

注：(1) $n\le 6$. 当 $n\ge 7$ 时，$L_n(x)$ 会发散。
一般二次，三次较常用。 分段低次插值。
(2) 事后误差估计法。
x_0, x_1, x_2.
x_0, x_1 做线性插值，近似值记为 u_1.
x_0, x_2 做线性插值，近似值记为 u_2.

$$f(x)-u_1=\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-x_0)(x-x_1) \qquad \xi_1\in(x_0,x_1) \quad ①$$

$$f(x)-u_2=\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-x_0)(x-x_2) \qquad \xi_2\in(x_0,x_2) \quad ②$$

①/② $$\frac{f(x)-u_1}{f(x)-u_2}=\frac{x-x_1}{x-x_2} \quad \Leftarrow f''(\xi_1)\approx f''(\xi_2)$$

$$\underbrace{f(x)-u_1}_{R_1(x)}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(u_2-u_1)$$

例 2-4. 已知表

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.7	0.8
$f(x)$	1.0000	1.00499	1.01960	1.04399	1.07683	1.11730	1.21579	1.27039

要求从中适当选取6个插值节点，使求用这些插值多项式在 $x=0.24$ 处算得的 $f(x)$ 近似值精度较高？

$$R_5(x)=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\prod_{i=0}^{5}(x-x_i).$$

① 取 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5

$$\prod_{i=0}^{5}|(0.24-x_i)|=3.4\times10^{-6}.$$

② 取 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6

$$\prod_{i=0}^{5}|(0.24-x_i)|=5.03\times10^{-4}.$$

③ 取 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7

$$\prod_{i=0}^{5}|(0.24-x_i)|=1.7\times10^{-5}.$$

故应选取 ② 组的6个节点。

§2-3. Newton 插值

一、差商（均差）
设给定了一个函数表， x x_0 x_1 ⋯ x_n
$f(x)$ $f(x_0)$ $f(x_1)$ ⋯ $f(x_n)$

29Lines 8mm

其中，$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是 $[a, b]$ 上互不相同的非等距节点.

零阶差商：$f[x_i] = f(x_i)$. 函数 $f(x)$ 在点 x_i 处的零阶差商.

一阶差商：$f[x_i, x_j] = \dfrac{f[x_i] - f[x_j]}{x_i - x_j}$ $(i \neq j)$. 函数 $f(x)$ 在点 x_i, x_j 处的一阶差商.

二阶差商：$f[x_i, x_j, x_k] = \dfrac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$ $(i \neq j \neq k)$.

$\vdots$

n阶差商：$f[x_0, x_1, \cdots x_n] = \dfrac{f[x_0, x_1, \cdots x_{n-1}] - f[x_1, x_2, \cdots x_n]}{x_0 - x_n}$

注：

当 $x_0, x_1, \cdots x_n$ 给定时，n阶差商是一个具体的数值，但当节点 $x_0, x_1, \cdots x_n$ 中含有变量 x 时，则差商是变量 x 的函数.

二. Newton 插值公式.

$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
x_0	x_1	x_2

一阶 $f[x, x_0] = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$　$f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$　$f[x_1, x_2] = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

二阶 $f[x, x_0, x_1] = \dfrac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$　$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$.

三阶 $f[x, x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x, x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_2]}{x - x_2}$

$\vdots$

$f(x) = L_n(x) + R_n(x)$

由一阶差商得：$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x, x_0]$.

由二阶差商得：$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1) f[x, x_0, x_1]$.

由三阶差商得：$f[x, x_0, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_2) f[x, x_0, x_1, x_2]$.

$\vdots$

由n+1阶差商得：$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \cdots, x_n] + (x - x_n) f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n]$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \cdots +$
$(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \cdots x_n] +$
$(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) f[x, x_0, \cdots x_n]$.

$$N_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + \cdots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\cdots,x_n].$$

Newton插值公式.

$$R_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n].$$

$R_n(x_i) \equiv 0.$ $f(x_i) = N_n(x_i)$.

三. Newton插值的性质.

$$\begin{cases} N_1(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0,x_1] \\ R_1(x) = (x-x_0)(x-x_1)f[x,x_0,x_1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_2(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] = N_1(x) + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \\ R_2(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x,x_0,x_1,x_2] \end{cases}$$

⋮

$$N_k(x) = N_{k-1}(x) + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})f[x_0,x_1,\cdots,x_k].$$

性质: 每增加一个节点, 只需在原Newton插值公式中增添一项, 便可形成高一次的插值公式.

x_k	x_0	x_1	x_2	x_3	$\cdots$
$f(x_k)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$\cdots$
一阶差商	$f[x_0,x_1]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_2,x_3]$		
二阶差商	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$			
三阶差商	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$				

⋮

非等距

只需2个节点的值单元.

分别对应 $N_n(x)$ 的系数

例2-5. 构造例2-2中 $f(x)$ 的Newton插值多项式.

x_k	1	2	3	4
$f(x_k)$	0	-5	-6	3
一阶差商	-5	-1	9	
二阶差商	2	5		
三阶差商	1			

$$N_3(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3]$$

$$= 0 + (-5)(x-1) + 2(x-1)(x-2) + (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$= x^3 - 4x^2 + 3.$$

例2-1. 设$f(x)$有如下表值，试构造$f(x)$的Newton插值多项式？

x_k	1	2	3	4	5
$f(x_k)$	0	-5	-6	3	21
一阶		-5	-1	9	18
二阶			2	5	4.5
三阶				1	$-\frac{1}{6}$
四阶					$-\frac{7}{24}$

$N_4(x) = x^3 - 4x^2 + 3 - \frac{7}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

五. 算法

1. 输入初始数据 x, x_i, f_i $(i=0,1,2\cdots n)$
2. 计算各阶差商

   对 $i=1,2,3\cdots n$. $\frac{f_{k-i}-f_k}{x_{k-i}-x_k} \Rightarrow f_k$ $(k=n, n-1, n-2, \cdots i)$.
3. $N_n(x) = f_0 + \sum_{k=1}^{n} f_k\left[\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)\right]$

   $= \{[(f_n(x-x_{n-1}) + f_{n-1})(x-x_{n-2}) + f_{n-2}](x-x_{n-3}) + \cdots\}(x-x_0) + f_0.$
4. 输出 $N_n(x)$ 和 $f(x)$.

§2-4 差分与等距节点Newton插值公式.

一、差分

设函数 $y=f(x)$ 在等距节点 $x_i = x_0 + ih$ $(i=0,1,2\cdots)$ 上的函数值为 $f(x_i) = f_i$,

h —— 步长

Δ —— 向前差分算子

∇ —— 向后差分算子.

一阶向前差分: $\Delta f_i = f(x_i+h) - f(x_i) = f_{i+1} - f_i$.

函数$f(x)$在点x_i处的一阶向前差分.

二阶向前差分: $\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - f_{i+1} - f_{i+1} + f_i$

$= f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$.

n阶向前差分: $\Delta^n f_i = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i$. $(n=2,3\cdots)$

一阶向后差分: $\nabla f_i = f(x_i) - f(x_i-h) = f_i - f_{i-1}$

二阶向后差分: $\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1}) = \nabla f_i - \nabla f_{i-1} = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$

No
Date

n阶向后差分：$\nabla^n f_i = \nabla^{n-1} f_i - \nabla^{n-1} f_{i-1}$ $(n=2,3,\cdots)$.

差分表：x_0 x_1 x_2 x_3 $\cdots$

f_0 f_1 f_2 f_3 $\cdots$

Δf_i $\Delta f_0 = f_1 - f_0$ $\Delta f_1 = f_2 - f_1$ $\Delta f_2 = f_3 - f_2$

$\Delta^2 f_i$ $\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$ $\Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1$.

$\Delta^3 f_i$ $\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$.

∇f_i $\nabla f_1 = f_1 - f_0$ $\nabla f_2 = f_2 - f_1$ $\nabla f_3 = f_3 - f_2$.

$\nabla^2 f_i$ $\nabla^2 f_2 = \nabla f_2 - \nabla f_1$ $\nabla^2 f_3 = \nabla f_3 - \nabla f_2$

$\nabla^3 f_i$ $\nabla^3 f_3 = \nabla^2 f_3 - \nabla^2 f_2$.

$\Rightarrow \nabla^k f_i = \Delta^k f_{i-k}$ $(k \geq 1)$.

二. 差分与差商的关系.

差商的性质：(1) 对称性：函数 $f(x)$ 在点 $x_0, x_1, \cdots x_k$ 处的 k 阶差商，与点 $x_0, x_1, \cdots x_k$ 的排列顺序无关.

$f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$.

(2) 差商与导数的关系：若函数 $f(x)$ 在包含点 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 的某个区间 $[a,b]$ 上 k 阶导数存在，则 $f[x_0, x_1, \cdots x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$.

$\xi \in [a,b]$.

一阶差商与一阶向前差分.

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f_0}{1!\,h}$$

二阶差商与二阶向前差分.

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{\Delta f_1}{1!\,h} - \frac{\Delta f_0}{1!\,h}}{2h} = \frac{\Delta f_1 - \Delta f_0}{2!\,h^2} = \frac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2}$$

k阶差商与k阶向前差分.

$$f[x_0, x_1, \cdots x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots x_k] - f[x_0, \cdots x_{k-1}]}{x_k - x_0} = \frac{\Delta^n f_0}{k!\,h^k}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

k阶差商与k阶向后差分.

$$f[x_n, x_{n-1}, \cdots x_{n-k}] = \frac{\nabla^k f_n}{k!\,h^k}$$

三. 等距节点的Newton向前插值公式.

$$N_n(x) = f_0 + (x-x_0)\frac{\Delta f_0}{1!\,h} + (x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2} + \cdots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\frac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n}.$$

令 $x = x_0 + th$. $(0 \leq t \leq 1)$.

$x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, \cdots n)$.

29 Lines, 6mm

No
Date

$x-x_i=(t-i)h.$

$$\boxed{N_n(x)=f_0+\frac{t\Delta f_0}{1!}+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\cdots+\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0}$$ *

Newton 前插公式

$R_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f[x_0,x_1,\cdots x_n]$
$=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

* $$\boxed{R_n(x)=\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi),\quad \xi\in(x_0,x_n)}$$ 余项公式.

注: Newton 前插公式一般适用于计算插值点 x 落在数据表初始点附近的函数近似值.

(四) 等距节点 Newton 向后插值公式.

$x_n,\ x_{n-1},\ x_{n-2},\ \cdots\ x_1,\ x_0.$

$N_n(x)=f(x_n)+(x-x_n)f[x_n,x_{n-1}]+(x-x_n)(x-x_{n-1})f[x_n,x_{n-1},x_{n-2}]+\cdots$
$+(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_1)f[x_n,x_{n-1},\cdots x_0].$

$R_n(x)=(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_1)(x-x_0)f[x_n,x_{n-1},\cdots,x_0,x].$

$\because x_i=x_0+ih.\quad i=0,1,\cdots n.$

$x=x_n+th.\quad (-1\le t\le 0).$

$\therefore x-x_n=th.$

$x-x_{n-1}=(t+1)h.$

* $$\boxed{N_n(x)=f_n+\frac{t}{1!}\nabla f_n+\frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_n+\cdots+\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\nabla^n f_n.}$$

Newton 后插公式.

* $$\boxed{R_n(x)=\frac{t(t+1)(\cdots(t+n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi).}$$ 余项公式.

注: Newton 后插公式一般适用于计算插值点 x 落在数据表尾附近的函数近似值.

例 2.7.

已知正弦值如下,

x	0.4	0.5	0.6	0.7
sin x	0.38942	0.47943	0.56464	0.64422

分别用 Newton 前插、后插公式计算 sin(0.57891)=? 并估算误差.

解:

29Lines, 8mm

No
Date

x	0.4	0.5	0.6	0.7
$\sin x$	0.38942	0.47943	0.56464	0.64422
一阶 $\Delta(D)$	0.09001	0.08521	0.07958	
二阶 $\Delta^2(D^2)$	-0.00480	-0.00563		
三阶 $\Delta^3(D^3)$	-0.00083			

差分表

Newton 前插.

$x_0 = 0.5 \quad x_1 = 0.6, \quad x_2 = 0.7$

$\Delta f_0 = 0.08521. \quad \Delta^2 f_0 = -0.00563. \quad h = 0.1 \quad t = \frac{x - x_0}{h} = 0.7891.$

$N_2(0.57891) = f_0 + \frac{t}{1!}\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0.$

$= 0.08521 + 0.7891 \times 0.08521 + \frac{1}{2} \times 0.7891 \times (-0.2109) \times (-0.00563)$

$= 0.54714.$

$R_2(x) = \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} h^3 f^{(3)}(\xi) = 3.36 \times 10^{-5} \cos \xi.$

$0.5 < \xi < 0.7 \Rightarrow R_n(x) < 2.95 \times 10^{-5}.$

New 后插.

$x_n = 0.6, \quad x_{n-1} = 0.5, \quad x_{n-2} = 0.4.$

$t = \frac{x - x_n}{h} = \frac{0.57891 - 0.6}{0.1} = -0.2109.$

$N_2(x) = f_n + \frac{t}{1!}\nabla f_n + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_n. = 0.54707.$

$R_2(x) = \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} h^3 f^{(3)}(\xi)$

$\because 0.4 < \xi < 0.5 \Rightarrow |R_n(x)| < 4.57 \times 10^{-5}.$

§2-5 Hermite 埃尔米特插值

若已知函数 $f(x)$ 在插值区间 $[a,b]$ 上 $n+1$ 个互异节点 $x_0, x_1, \cdots x_n$ 处的函数值 $y_i = f(x_i)$ 及一阶导数值 $y_i' = f'(x_i)$ $(i = 0, 1, 2 \cdots n)$. 要求构造一个次数不超过 $2n+1$ 的多项式，使其满足
$$\begin{cases} H_{2n+1}(x_i) = y_i, & i = 0, 1, 2 \cdots n. \\ H'_{2n+1}(x_i) = y_i' \end{cases}$$

$H_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} h_k(x) y_k + \sum_{k=0}^{n} \bar{h}_k y_k'$

$h_k(x) = \left[1 - 2(x - x_k)\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_j}\right] l_k^2(x). \quad \bar{h}_k(x) = (x - x_k) l_k^2(x). \quad k = 0, 1, 2 \cdots n.$

Hermite 插值基函数

一般取 $n=1$.

$L_3(x)$. $N_3(x)$. $H_3(x)$.
求它们的误差

29Lines, 6mm

余项：对于给定的 x，若函数 $f(x)$ 在区间上具有 $2n+2$ 阶导数，则插值公式的余项

$$R_{2n+1}(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)^2,\ \xi\in(x_0, x_n).$$

例 2-8. 构造如下 Hermite 插值多项式.

x_i	0	1
y_i	0	1
y_i'	3	9

$H_3(x) = h_0y_0 + h_1y_1 + \bar{h}_0y_0' + \bar{h}_1y_1'$

$h_0 = [1-2(x-x_0)(\frac{1}{x_0-x_1})]l_0^2(x) = [1-\frac{2(x-x_0)}{x_0-x_1}](\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2.$

$h_1 = [1-2(x-x_1)(\frac{1}{x_1-x_0})]l_1^2(x) = [1-\frac{2(x-x_1)}{x_1-x_0}](\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2.$

$\bar{h}_0(x) = (x-x_0)l_0^2(x) = (x-x_0)\cdot\frac{(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)^2}.$

$\bar{h}_1(x) = (x-x_1)l_1^2(x) = (x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2.$

代入 $H_3(x)$，有 $H_3(x) = 10x^3 - 12x^2 + 3x.$

× §2-6. 样条函数插值.

分段低次插值.

连接点连续性，不能光滑性.

一. 三次样条函数插值 (spline).

设在区间 $[a,b]$ 上给定一组节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，上的函数值 $y_0, y_1, \cdots y_n$，

若函数 $S(x)$ 满足：(1) $S(x)$ 在每个子区间 $[x_{k-1}, x_k]$ $(k=1,2,\cdots n)$ 上都是次数不超过 3 的多项式.

(2) $S(x_k) = y_k$.

(3) $S(x)$ 在每个内节点 x_k $(k=1,2,\cdots n-1)$ 上具有直到二阶的连续导数

$S(x) = a_kx^3 + b_kx^2 + c_kx + d_k,\quad x\in[x_{k-1}, x_k],\ k=1,2,\cdots n.$

其中 a_k, b_k, c_k, d_k 待定.

$S(x)$ 满足：(1) 插值条件：$S(x_k) = y_k,\ k=0,1,2\cdots n.\quad n+1$ 个.

(2) 连接条件：$S(x_k-0) = S(x_k+0)$

$S'(x_k-0) = S'(x_k+0),\quad k=1,2,\cdots n-1.$

$S''(x_k-0) = S''(x_k+0).\quad 3n-3$ 个

边界条件: $s'(x_0)=y_0'$, $s'(x_n)=y_n'$ —— 第一类边界条件.

$s''(x_0)=y_0''$, $s''(x_n)=y_n''$ —— 第二类边界条件.

二. Spline 插值函数的构造.

∵ $S(x)$ 在第k个区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上是不超过3次的多项式.

∴ 设 $s''(x_{k-1})=M_{k-1}$, $s''(x_k)=M_k$.

$$s''(x)=\frac{x-x_k}{x_{k-1}-x_k}M_{k-1}+\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}M_k$$

令 $h_k=x_k-x_{k-1}$. 有 $s''(x)=-\frac{x-x_k}{h_k}M_{k-1}+\frac{x-x_{k-1}}{h}M_k$. $x\in[x_{k-1},x_k]$

$$s'(x)=\int s''(x)\,dx=-\frac{M_{k-1}}{2h_k}(x_k-x)^2+\frac{M_k}{2h_k}(x-x_{k-1})^2+\alpha_k.\quad x\in[x_{k-1},x_k].$$

$$s(x)=\int s'(x)\,dx=\frac{M_{k-1}}{6h_k}(x_k-x)^3+\frac{M_k}{6h_k}(x-x_{k-1})^3+\alpha_k x+\beta_k,\quad x\in[x_{k-1},x_k]$$

∵ $\begin{cases} S(x_{k-1})=y_{k-1} \\ S(x_k)=y_k. \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{M_{k-1}}{6}h_k^2+\alpha_k x_{k-1}+\beta_k=y_{k-1} \\ \frac{M_k}{6}h_k^2+\alpha_k x_k+\beta_k=y_k. \end{cases}$ 可求出 α_k. β_k.

$$s(x)=\frac{M_{k-1}}{6h_k}(x_k-x)^3+\frac{M_k}{6h_k}(x-x_{k-1})^3+\frac{1}{h_k}\left(y_k-\frac{M_kh_k^2}{6}\right)(x-x_{k-1})+\frac{1}{h_k}\left(y_{k-1}-\frac{M_{k-1}h_k^2}{6}\right)(x_k-x)\quad x\in[x_{k-1},x_k].$$

$$s'(x)=-\frac{M_{k-1}}{2h_k}(x_k-x)^2+\frac{M_k}{2h_k}(x-x_{k-1})^2+\frac{y_k-y_{k-1}}{h_k}-\frac{h_k}{6}(M_k-M_{k-1})\quad x\in[x_{k-1},x_k]$$

$$s'(x_k-0)=\frac{M_k}{2}h_k+\frac{y_k-y_{k-1}}{h_k}-\frac{h_k}{6}(M_k-M_{k-1})$$
$$=\frac{h_k}{6}M_{k-1}+\frac{h_k}{3}M_k+\frac{y_k-y_{k-1}}{h_k}.$$

将 $k-1\to k$, $k\to k+1$ 则可求出 $s'(x_k+0)$.

$$s'(x_k+0)=-\frac{M_k}{2}h_{k+1}+\frac{y_{k+1}-y_k}{h_{k+1}}-\frac{h_{k+1}}{6}(M_{k+1}-M_k)$$
$$=-\frac{h_{k+1}}{3}M_k-\frac{h_{k+1}}{6}M_{k+1}+\frac{y_{k+1}-y_k}{h_{k+1}}.$$

∵ $s'(x_k-0)=s'(x_k+0)$

$$∴\ \underbrace{\frac{h_k}{h_k+h_{k+1}}}_{\mu_k}M_{k-1}+2M_k+\underbrace{\frac{h_{k+1}}{h_k+h_{k+1}}}_{\lambda_k}M_{k+1}=\underbrace{\frac{6}{h_k+h_{k+1}}\left(\overbrace{\frac{y_{k+1}-y_k}{h_{k+1}}}^{f[x_k,x_{k+1}]}-\frac{y_k-y_{k-1}}{h_k}\right)}_{d_k}.$$

$$\mu_kM_{k-1}+2M_k+\lambda_kM_{k+1}=d_k\quad k=1,2,\cdots,n-1$$

第一类边界
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$
$(n+1)$阶.

三对角线方程

计算方法　　　　　　通信工程　张棠　1020421

A−

第2章.

1. 已知 $\ln 10=2.3026$, $\ln 11=2.3979$. $\ln 12=2.4849$. $\ln 13=2.5649$. $\ln 14=2.6391$.
用线性和抛物线插值计算 $\ln 11.75$ 时的误差.

线性插值:

取 $x_0=11$, $x_1=12$. 则 $y_0=2.3979$. $y_1=2.4849$. $f(x)=\ln x$

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$, $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow R_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1)=\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{\xi^2})(x-11)(x-12)$

$=-\frac{0.75\times(-0.25)}{2\xi^2}=0.09375\frac{1}{\xi^2}$. $\xi\in(11,12)$.

$11<\xi<12\Rightarrow 6.9444\times10^{-3}<\frac{1}{\xi^2}<8.2645\times10^{-3}$

$\Rightarrow 6.5104\times10^{-4}<R_1(x)<7.7479\times10^{-4}$

抛物线插值.

i, 取 $x_0=10$, $x_1=11$, $x_2=12$.

$y_0=2.3026$, $y_1=2.3979$. $y_2=2.4849$.

$R_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\prod_{j=0}^{2}(x-x_j)$. $f^{(3)}(x)=\frac{2}{x^3}$.

$=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{\xi^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)=\frac{1}{3\xi^3}[1.75\times0.75\times(-0.25)]=-\frac{0.109375}{\xi^3}$.

$11<\xi<12\Rightarrow 5.7870\times10^{-4}<\frac{1}{\xi^3}<7.5131\times10^{-4}$

$\Rightarrow -8.2175\times10^{-5}<R_2(x)<-6.3296\times10^{-5}$.

ii, 取 $x_0=11$. $x_1=12$, $x_2=13$.

$y_0=2.3979$, $y_1=2.4849$, $y_2=2.5649$.

$R_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\prod_{j=0}^{2}(x-x_j)=\frac{1}{3\xi^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$=\frac{1}{3\xi^3}[0.75\times(-0.25)\times(-1.25)]=\frac{0.078125}{\xi^3}$.　　$11<\xi<13$.

$\cancel{5.7870\times10^{-4}}<\frac{1}{\xi^3}<7.5131\times10^{-4}\Rightarrow 4.5211\times10^{-5}<R_2(x)<5.8696\times10^{-5}$.

2. 当 $x=-1,1,2$ 时, $f(x)=-3,0,4$, 试构造 $f(x)$ 的二次 Lagrange 插值多项式.

$x_0=-1$. $x_1=1$. $x_2=2$

$y_0=-3$. $y_1=0$. $y_2=4$.

$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}=\frac{1}{6}(x-1)(x-2)$.

$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x+1)(x-2)}{2\times(-1)}=-\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$.

$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x+1)(x-1)}{3\times1}=\frac{1}{3}(x+1)(x-1)$.

通信工程
张策
101047

$L_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$

$= -\frac{1}{2}(x-1)(x-2) + \frac{4}{3}(x+1)(x-1) = \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{3}$.

即，$f(x)$ 的二次 Lagrange 插值多项式 $L_2(x) = \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{3}$.

3. 已知

x	1	2	3	4	5
y	1	4	7	8	6

试构造 Newton 插值多项式.

$x_0 = 1$，$x_i = x_0 + ih = 1 + i$.　$h = 1$.

x	1	2	3	4	5
y(f(x))	1	4	7	8	6

一阶差商	3	3	1	-2
二阶差商	0	-1	$-\frac{3}{2}$	
三阶差商	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$		
四阶差商	$\frac{1}{24}$			

$N_4(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

$+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$.

$= 1 + 3(x-1) - \frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3) + \frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

$= \frac{1}{24}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{83}{24}x^2 - \frac{11}{4}x + 1$.

将 $M_0, M_1, \cdots M_n$ 代入

$$S(x) = \begin{cases} a_0x^3 + b_0x^2 + c_0x + d_0 & x_0 \le x \le x_1 \\ a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & x_1 \le x \le x_2 \\ \cdots & \cdots \\ a_{n-1}x^3 + b_{n-1}x^2 + c_{n-1}x + d_{n-1} & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

三. spline 算法

1. 输入初始数据 x_k, y_k, $(k=0,1,\cdots n)$, 及 f_0', f_n', 和 n.
2. k 从 0 到 $n-1$ 计算 $h_k = x_{k+1} - x_k$. 及 $f[x_{k+1}, x_k]$
3. $k = 1, 2, \cdots n-1$, 计算 λ_k, μ_k, d_k.
4. 用追赶法解方程组.

作业1.

1. 已知 $\ln 10 = 2.3026$, $\ln 11 = 2.3979$, $\ln 12 = 2.4849$, $\ln 13 = 2.5649$, $\ln 14 = 2.6391$. 用线性和抛物线插值计算 $\ln 11.75$ 的近似值.
2. 当 $x = -1, 1, 2$ 时, $f(x) = -3, 0, 4$ 试构造 $f(x)$ 的二次 Lagrange 插值多项式?
3. 已知

x	1	2	3	4	5
y	1	4	7	8	6

试构造 Newton 插值多项式.

No
Date

第三章 曲线拟合的最小二乘法

§3-1 引言

x_i	x_0	x_1	$\cdots$	x_m
y_i	y_0	y_1	$\cdots$	y_m

$R(x_i) \overset{?}{=} 0$

eg. $s = v \cdot t$

当 $v = c$ 时，线性

反映数据的基本趋势

曲线拟合法 —— 从误差偏差最小的角度求近似曲线

§3-2 曲线拟合的最小二乘法

一、最小二乘拟合多项式

$\delta_i = s(x_i) - f(x_i) \quad i = 1, 2, \cdots, m$

偏差

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{m} [s(x_i) - f(x_i)]^2$$

定义：根据偏差的平方和为最小的原则选择 $f(x)$ 的近似值 $s(x)$ 的方法。

对于给定的数据表

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
y_i	y_1	y_2	$\cdots$	y_m

要求在某个函数类中 $\Phi = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$ 中，寻找一个函数

$s^*(x) = a_0^* \varphi_0(x) + a_1^* \varphi_1(x) + \cdots + a_n^* \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^* \varphi_k(x) \quad (n < m)$，使 $s^*(x)$

满足 $\sum_{i=1}^{m} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{m} [s(x) - f(x)]^2 = \min_{s(x) \in \Phi} \sum_{i=1}^{m} [s(x_i) - f(x_i)]^2$

式中，$s(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \cdots + a_n \varphi_n(x)$

两个环节：

① 先根据所给数据点的变化趋势与实际问题的实际背景，确定函数类中。

② 按最小二乘原则求取最小二乘解 $s^*(x)$，即确定系数 $a_k^* \ (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$

二、最小二乘解的求法

$I(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x_i) - f(x_i) \right]^2$ 极小值

$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 2 \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x_i) - f(x_i) \right] \varphi_k(x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_k(x_i) \left[a_0 \varphi_0(x_i) + a_1 \varphi_1(x_i) + \cdots + a_n \varphi_n(x_i) - f(x_i) \right] = 0$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} \varphi_k(x_i) \varphi_0(x_i) + a_1 \sum_{i=1}^{m} \varphi_k(x_i) \varphi_1(x_i) + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{m} \varphi_k(x_i) \varphi_n(x_i) - \sum_{i=1}^{m} \varphi_k(x_i) f(x_i) = 0$$

29 Lines, 8mm

设 $(h,g)=\sum_{i=1}^{m} h(x_i)\cdot g(x_i)$

上式可记为，$a_0(\varphi_k,\varphi_0)+a_1(\varphi_k,\varphi_1)+a_2(\varphi_k,\varphi_2)+\cdots+a_n(\varphi_k,\varphi_n)=(\varphi_k,f)$,

$k=0,1,2,\cdots,n.$

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\varphi_0,f)\\ (\varphi_1,f)\\ \vdots\\ (\varphi_n,f)\end{pmatrix}$$ — 法方程组.

若采用代数多项式拟合.

$\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=x,\ \varphi_2(x)=x^2\ \cdots\ \varphi_n(x)=x^n.$

$(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_j(x_i)\cdot\varphi_k(x_i)=\sum_{i=1}^{m}x_i^{j+k}.$

$(\varphi_k,f)=\sum_{i=1}^{m}x_i^k y.$

代入，法方程组可记为.

$$\begin{pmatrix}m & \sum_{i=1}^{m}x_i & \sum_{i=1}^{m}x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{m}x_i^n\\ \sum_{i=1}^{m}x_i & \sum_{i=1}^{m}x_i^2 & \sum_{i=1}^{m}x_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^{m}x_i^{n+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \sum_{i=1}^{m}x_i^n & \sum_{i=1}^{m}x_i^{n+1} & \sum_{i=1}^{m}x_i^{n+2} & \cdots & \sum_{i=1}^{m}x_i^{2n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{m}y\\ \sum_{i=1}^{m}x_iy\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{m}x_i^ny\end{pmatrix}$$ — 法方程组.

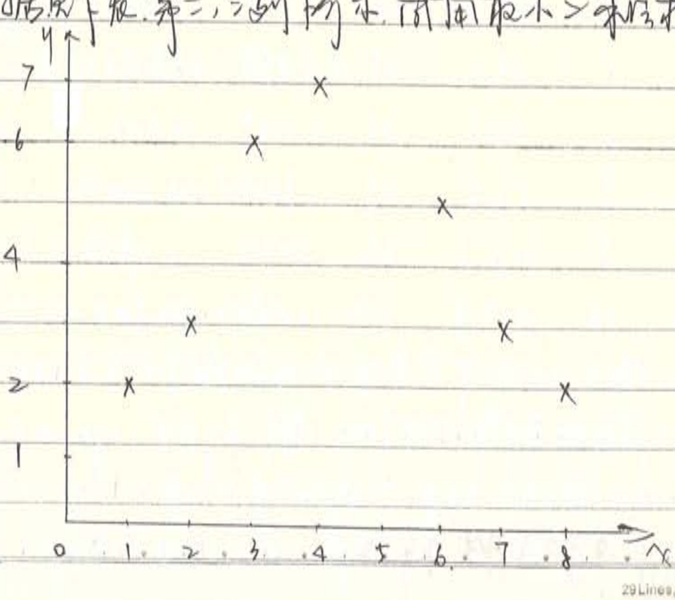
对称性.

m个节点

例3-1.

设已测函数 $y=f(x)$ 的实测数据如下表第二、三列所示，试用最小二乘法求多项式曲线与此数据组拟合.

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_iy_i	$x_i^2y_i$
1	1	2	1	1	1	3	2
2	2	3	4	8	16	6	12
3	3	6	9	27	81	18	54
4	4	7	16	64	256	28	112
5	6	5	36	216	1296	30	180
6	7	3	49	343	2401	21	147
7	8	2	64	512	4096	16	128
Σ	31	28	179	1171	8147	121	635



从图中可看出，这些点近似一条抛物线附近. 故

设 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$. 即 $\Phi = \{1, x, x^2\}$.

(2) 建立法方程组.

$$\begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^{m} x_i & \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{m} x_i & \sum_{i=1}^{m} x_i^2 & \sum_{i=1}^{m} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{m} x_i^2 & \sum_{i=1}^{m} x_i^3 & \sum_{i=1}^{m} x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} y \\ \sum_{i=1}^{m} x_i y \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y \end{pmatrix}$$

代入数值，得

$$\begin{pmatrix} 7 & 31 & 179 \\ 31 & 179 & 1171 \\ 179 & 1171 & 8147 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 121 \\ 635 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_0 = -1.3185 \qquad a_1 = 3.4321 \qquad a_2 = -0.3864$$

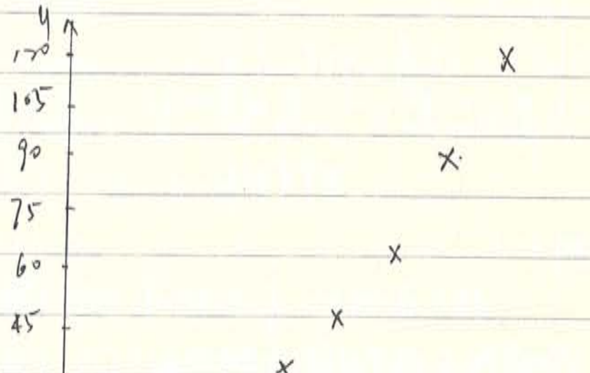
(3) 拟合曲线.

$$y = -1.3185 + 3.4321x - 0.3864x^2.$$

例 3-2.

已知一组实验数据如下表第 0.3 列所示，试从这组数据出发建立变量 x 与 y 之间的经验公式?

i	x	y	x_i^2	u_i	x_iu_i
1	1	15.3	1	1.1447	1.1847
2	2	20.5	4	1.3118	2.6236
3	3	27.4	9	1.4378	4.3134
4	4	36.6	16	1.5635	6.2540
5	5	49.1	25	1.6911	8.4555
6	6	65.6	36	1.8169	10.9014
7	7	87.8	49	1.9435	13.6045
8	8	117.6	64	2.0704	16.5632
Σ	36	419.9	204	13.0197	63.9002



(1) 描点. 从图中可看出，这些点近似一条指数曲线附近. $y = ae^{bx}$.

两边取常用对数，有 $\lg y = \lg a + bx\lg e$.

令 $u = \lg y$. $A = \lg a$. $B = b\lg e$.

得线性模型. $u = A + Bx$.

(2) 建立法方程组.

$$\begin{bmatrix} 8 & \sum_{i=1}^{8} x_i \\ \sum_{i=1}^{8} x_i & \sum_{i=1}^{8} x_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{8} u_i \\ \sum_{i=1}^{8} x_i u_i \end{bmatrix}$$

代入数据,得. $\begin{bmatrix} 8 & 36 \\ 36 & 204 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.0197 \\ 63.9003 \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow A = 1.0583. \quad B = 0.1265.$

(3) 拟合曲线.

$A = \lg a \Rightarrow a = 10^{1.0583} = 11.44$

$B = b \lg e \Rightarrow b = 0.1265 / \lg e = 0.2913.$

$\Rightarrow y = 11.44 e^{0.2913x}.$

× §3-3. 加权最小二乘法.

定义: 对于给定的一组数据

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_m

,要求在某个函数类 $\Phi = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x) \cdots \varphi_n(x)\}$ 中寻找一个函数. $S^*(x) = a_0^* \varphi_0(x) + a_1^* \varphi_1(x) + \cdots + a_n^* \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^* \varphi_k(x)$ $(n < m)$, 使 $S^*(x)$ 满足

$$\sum_{i=1}^{m} w_i \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{m} w_i [S^*(x_i) - f(x_i)]^2 = \min \sum_{i=1}^{m} w_i [S(x_i) - f(x_i)]^2, \quad S(x) \in \Phi.$$

其中 $S(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \cdots + a_n \varphi_n(x)$.

权 w_i $(i = 1, 2, \cdots m)$ 是一组正数.

× §3-4. 利用正交函数作最小二乘拟合

一. 正交函数系的概念

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0.$ $(i \neq j)$. 正交函数系.

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \cdots$

$\int_{-\pi}^{\pi} (\ )(\ ) = 0. \quad \int_{-\pi}^{\pi} (\ )^2 = 1.$ 标准正交函数系

定义: 若内积 $(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = 0$. 则称 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交. 若函数系 $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$ 满足 $(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \rho(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ A_j > 0, & i = j \end{cases}$, 则称函数系 $\{\varphi_k(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交函数系, 若

$A_j=1$ 时，$\{\varphi_k(x)\}$ 为带权 ... 标准正交函数系。

此时，法方程组可化为 $\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & & & \\ & (\varphi_1,\varphi_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\varphi_0,f) \\ (\varphi_1,f) \\ \vdots \\ (\varphi_n,f) \end{pmatrix}$

二、常用的正交函数系。

1. 切比雪夫多项式 (Chebyshev)

$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,\quad T_2(x)=2x^2-1\ \cdots$

$T_{n+1}(x)=2x\cdot T_n(x)-T_{n-1}(x).$

正交区间 $[-1,1]$，权函数 $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. 勒让德多项式 (Legendre)

$p_0(x)=1,\ p_1(x)=x,\ p_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)\cdots$

$p_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}x\,p_n(x)-\frac{n}{n+1}p_{n-1}(x).$

正交区间 $[-1,1]$，权函数 $w(x)=1$.

3. 拉盖尔多项式 (Laguerre).

$L_0(x)=1,\ L_1(x)=1-x,\quad L_2(x)=2-4x+x^2\cdots$

$L_{n+1}(x)=(1+2n-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x).$

正交区间 $[0,+\infty)$，权函数 $w(x)=e^{-x}$.

例 3-3.

求函数 $y=e^x$ 在区间 $[-1,1]$ 上关于权函数 $w(x)=1$ 的三次最小二乘拟合多项式 $p(x)$。

解：选取勒让德多项式

$\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=x,\ \varphi_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\ \varphi_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x.$

$a_0=\frac{(\varphi_0,f)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=1.1752.\qquad a_1=\frac{(\varphi_1,f)}{(\varphi_1,\varphi_1)}=1.1036.$

$a_2=\frac{(\varphi_2,f)}{(\varphi_2,\varphi_2)}=0.3578.\qquad a_3=\frac{(\varphi_3,f)}{(\varphi_3,\varphi_3)}=0.07046.$

$\Rightarrow p(x)=1.1752+1.1036x+0.3578\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)+0.07046\cdot(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x)$

$=0.9963+0.9979x+0.5367x^2+0.1762x^3.$

第四章 数值积分与数值微分

§4-1. 引言

一. 必要性.

x_i	x_1	$\cdots$	x_n
y_i	y_1	$\cdots$	y_n

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

1. 函数 $f(x)$ 的精确表达式不知道，只给出一张由实验提供的数据表.
2. 被积函数 $f(x)$ 的原函数不能用初等函数以有限形式表示
3. 虽然 $f(x)$ 的原函数能用初等函数表示，但表达式过于复杂.

二. 构造插值求积公式的基本方法.

$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$.

积分区间 $[a,b]$，$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b l_i(x)\,dx}_{w_i \text{ —— 求积系数}}$$

$$w_i = \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}\,dx$$

* $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)}$ —— 插值型求积公式.

w_i —— 与被积函数 $f(x)$ 无关，只依赖求积节点 x_i.

x_i —— 求积节点.

三. 余项.

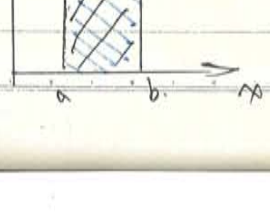
* $\boxed{R[f] = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) = \int_a^b R_n(x)\,dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\,dx.}$ $\xi \in (a,b)$

特点: 难以检验

四. 求积公式的代数精度.

定义: 若一个求积公式 $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$，对于所有次数不超过 m 的代数多项式，等式都精确成立，而对于某个 $m+1$ 次多项式不能精确成立，则称该求积公式具有 m 次代数精度.

$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_1(x)\,dx$.



$$\int_a^b p_1(x)\,dx = \int_a^b l_0 f(x_0) + l_1 f(x_1)\,dx$$
$$= \int_a^b \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)\,dx$$
$$= \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

No
Date

当 $f(x)=1$ 时，左 $=\int_a^b dx = b-a$.
右 $= b-a$.

当 $f(x)=x$ 时 左 $=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$
右 $=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

当 $f(x)=x^2$ 时. 左 $=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$.
右 $=\frac{1}{2}(b-a)(b^2+a^2)\neq$ 左.

$\therefore m=1$.

例 4-1.
设有求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx w_0 f(-1)+w_1 f(0)+w_2 f(1)$.
试确定 w_0, w_1, w_2，使上述求积公式的代数精度尽可能高，并指出该求积公式具有的代数精度？

令求积公式准确对 $f(x)=1, x, x^2$ 都精确成立.

$$\begin{cases}\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 = w_0+w_1+w_2\\ \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 = -w_0+w_2\\ \int_{-1}^{1} x^2\,dx = 2/3 = w_0+w_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 1/3\\ w_1 = 1/4\\ w_2 = 1/3\end{cases}$$

当 $f(x)=x^3$ 时.
$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 \Rightarrow$ 左 $=$ 右.
当 $f(x)=x^4$ 时. 左 $\neq$ 右.

求积公式：$\int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{3}f(-1)+\frac{4}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)$ $\Rightarrow$ 上述求积公式的代数精度为3.

定理. 含有 $n+1$ 个节点 $x_i\,(i=0,1,\cdots,n)$ 的插值型求积公式的代数精度至少为 n.
节点越多，精度越高

§4-2. Newton-Cotes (牛顿—柯特斯) 求积公式.

一. N-C 求积公式的导出.

求积区间 $[a,b]$ n 等分. 步长 $h=\frac{b-a}{n}$.

等距求积节点：$x_i = a+ih.\ (i=0,1,2\cdots n)$

$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i)$ —— N-C 求积公式

$$C_i^{(n)} = \frac{w_i}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b l_i(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}dx$$

作变换 $x=a+s\cdot h$

$x-x_j=(s-j)h.$

$x_i-x_j=(i-j)h.$

$$C_i^{(n)} = \frac{h}{b-a}\int_0^n \frac{s(s-1)\cdots(s-i+1)(s-i-1)\cdots(s-n)\cancel{h^n}}{i(i-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot(-1)(-2)\cdots[-(n-i)]\cancel{h^n}}ds$$

$$= \frac{(-1)^{n-i}}{n\cdot i!\,(n-i)!}\int_0^n s(s-1)\cdots(s-i+1)(s-i-1)\cdots(s-n)\,ds$$

No
Date

$$\boxed{C_i^{(n)} = \frac{(-1)^{n-i}}{ni!(n-i)!}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (s-j)\,ds. \quad (i=0,1,2,\cdots n)}$$ — Cotes 系数.

※ 1. 当 $n=1$ 时 求积节点 $x_0=a,\ x_1=b$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\left[C_0^{(1)}f(x_0)+C_1^{(1)}f(x_1)\right]$$

$$C_0^{(1)} = \frac{(-1)^{1-0}}{1\cdot 0!(1-0)!}\int_0^1 (s-1)\,ds = \frac{1}{2},$$

$$C_1^{(1)} = \frac{(-1)^{1-1}}{1\cdot 1!(1-1)!}\int_0^1 s\,ds = \frac{1}{2}.$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)[C_0^{(1)}f(x_0)+C_1^{(1)}f(x_1)] = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$ 梯形求积公式.

几何意义：用梯形的面积近似代替曲边梯形面积.

※ $$\boxed{T=\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]}$$ — 梯形求积公式.

2. 当 $n=2$ 时 求积节点: $a,\ \frac{a+b}{2},\ b$.

$$C_0^{(2)} = \frac{(-1)^2}{2\times 0!(2-0)!}\int_0^2 (s-1)(s-2)\,ds = \frac{1}{6}.$$

$$C_1^{(2)} = \frac{(-1)^1}{2\times 1!(2-1)!}\int_0^2 (s-2)s\,ds = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

$$C_2^{(2)} = \frac{(-1)^0}{2\times 2!\times 0!}\int_0^2 (s-1)s\,ds = \frac{1}{6}.$$

$$S=\int_a^b f(x)dx = (b-a)\left[C_0^{(2)}f(a)+C_1^{(2)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+C_2^{(2)}f(b)\right]$$
$$= \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$\boxed{S=\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]}$$ — Simpson 求积公式

3. 当 $n=4$ 时. 几何意义：用抛物线 $y=P_2(x)$ 围成的曲边梯形近似替代.

$$\boxed{C=\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]}$$ — Cotes 求积公式.

n	$C_0^{(n)}$	$C_1^{(n)}$	$C_2^{(n)}$	$C_3^{(n)}$	$C_4^{(n)}$	$C_5^{(n)}$
1	1/2	1/2				
2	1/6	4/6	1/6			
3	1/8	3/8	3/8	1/8		

真值: 0.43096440

例 4-2 分别用梯形、抛物线、Cotes 公式与 $n=8$ 时的 N-C 公式计算 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{x}\,dx = ?$

解: (1) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] = \frac{1-1/2}{2}[\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{1}] = 0.4267767$. (梯形)

(2) " $= \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)] = \frac{1-1/2}{6}(\sqrt{\frac{1}{2}}+4\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{1}) = 0.43093403$. (抛物线公式)

(3) " $= \frac{1-1/2}{90}[7\sqrt{\frac{1}{2}}+32\sqrt{\frac{5}{8}}+12\sqrt{\frac{6}{8}}+32\sqrt{\frac{7}{8}}+7\sqrt{1}] = 0.43096407$. (Cotes)

(4) " $\approx \frac{1-1/2}{28350}[989(1+\sqrt{\frac{1}{2}})+5888(\sqrt{\frac{9}{16}}+\sqrt{\frac{15}{16}})-928(\sqrt{\frac{10}{16}}+\sqrt{\frac{14}{16}})+10496(\sqrt{\frac{11}{16}}+\sqrt{\frac{13}{16}})$
$-4540\sqrt{\frac{12}{16}}] = 0.43096440$ $n=8$

2. Newton-Cotes 公式的余项.

定理: 若 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则梯形公式的余项为 $R_1[f] = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)$.

29 Lines, 6mm

No
Date

若 $f^{(4)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则辛普森公式的余项为 $R_S[f] = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$.

若 $f^{(6)}(x)$ 在 〃 〃，则 Cotes 〃 〃 〃 $R_C[f] = -\frac{8}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^7 f^{(6)}(\xi)$

注：实际计算时 $n>8$ 时 N-C 公式不适用.

*三、复合求积法

指导思想：将积分区间 $[a,b]$ 分成 n 个等长的小区间，并在每个小区间上采用相同的低阶 N-C 求积公式.

1. 复合梯形求积公式

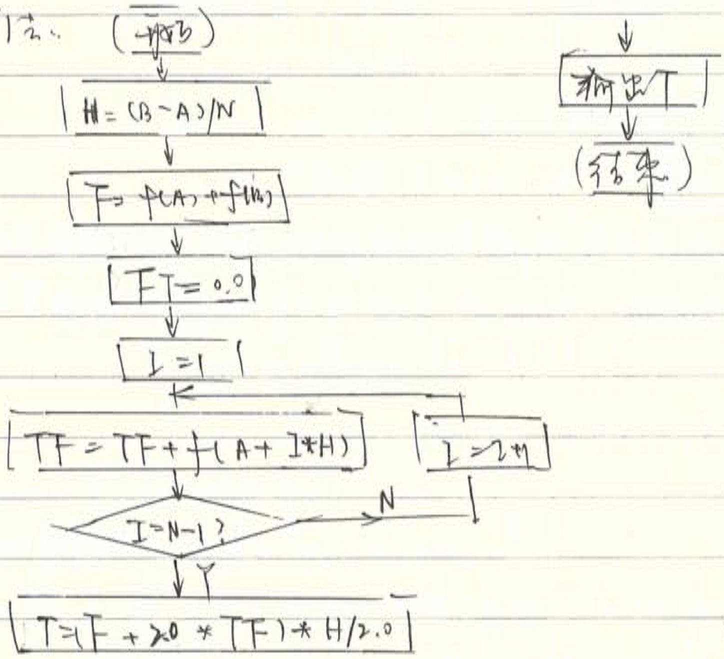
区间 $[a,b]$ n 等分 $x_i = a + ih$ $\quad i=0,1,2,\dots,n$, $\quad h=\frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] = T_n$$

* 即 $\boxed{T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]}$ —— 复合梯形公式

* 算法：



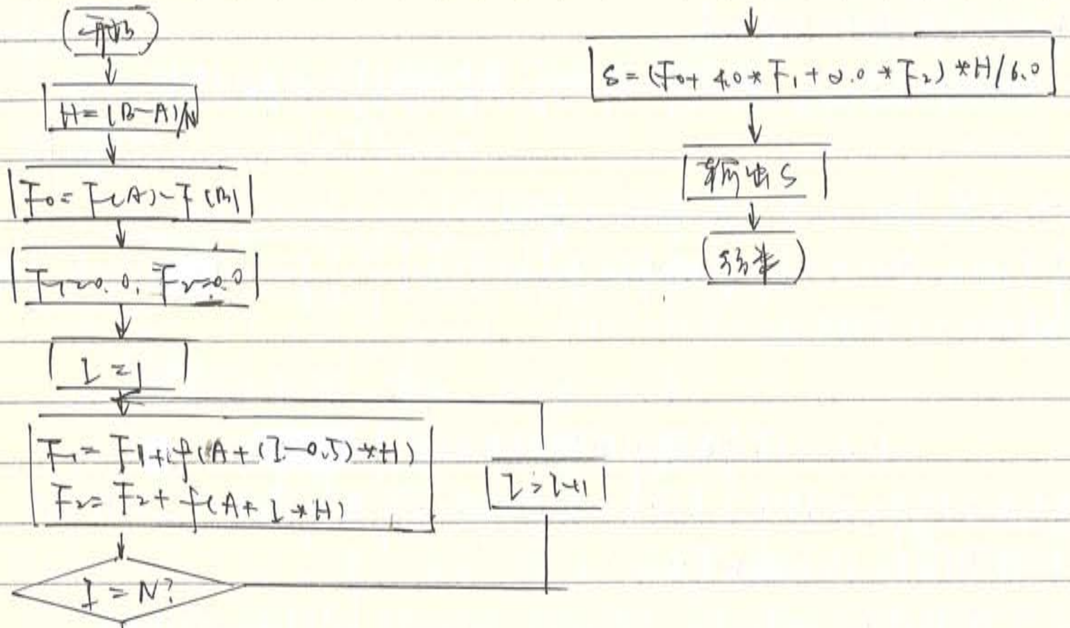
2. 复合抛物线求积公式

$[x_i, x_{i+1}]$ 上用 $n=2$ 的 N-C 公式.

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{6}\left[f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})\right]$$

* $\boxed{S_n = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + \underbrace{2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)}_{2\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(b)}\right]}$ —— 复合抛物线

算法：



3. 复合 Cotes 求积公式.

$$C_n=\frac{h}{90}\left[7f(a)+32\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{4}})+12\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})+30\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{3}{4}})+14\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+7f(b)\right]$$

$x_{i+\frac{1}{4}}=x_i+\frac{1}{4}h.$

$x_{i+\frac{1}{2}}=x_i+\frac{1}{2}h.$

$x_{i+\frac{3}{4}}=x_i+\frac{3}{4}h.$

4. 余项

定理: 若 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上分别具有二阶, 四阶和六阶连续导数, 则复合求积公式的余项分别为:

$$\int_a^b f(x)\,dx-T_n=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\xi).$$

$$\int_a^b f(x)\,dx-S_n=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4f^{(4)}(\xi).$$

$$\int_a^b f(x)\,dx-C_n=-\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6f^{(6)}(\xi).$$

例 4-3.

试分别用复合梯形和复合抛物线求积公式, 根据表中数据计算积分 $I=\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ 的近似值. (0.9460831).

x	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1
$f(x)$	1	0.9973978	0.9896158	0.9767267	0.9588510	0.9361556	0.9088516	0.8771925	0.8414709

解: 将积分区间 8 等分, 即

$n=8$, $h=\frac{1}{8}$.

∴ $T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$

∴ $T_8 = \frac{1}{16}\left\{f(0) + f(1) + 2\left[f(\frac{1}{8}) + f(\frac{2}{8}) + f(\frac{3}{8}) + f(\frac{4}{8}) + f(\frac{5}{8}) + f(\frac{6}{8}) + f(\frac{7}{8})\right]\right\} = 0.9456909$.

将[0,1]4等分. $n=4$ $h=\frac{1}{4}$.

∴ $S_n = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac12}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$.

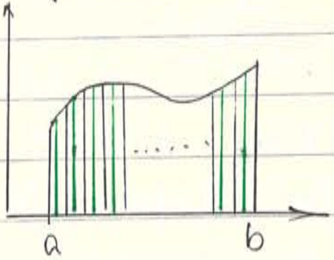
∴ $S_4 = \frac{1}{24}\left\{f(0) + f(1) + 4\left[f(\frac{1}{8}) + f(\frac{3}{8}) + f(\frac{5}{8}) + f(\frac{7}{8})\right] + 2\left[f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4})\right]\right\}$

$= 0.9460832$.

§4-3. 变步长梯形求积法(区间逐次分半法)

算法思想: 在步长逐次折半的过程中, 反复用复合求积公式计算, 直到满足 $|T_{2n} - T_n| < \varepsilon$.

第一步: 将求积区间 $[a, b]$ 分成 n 等分.



n+1个求积节点

$T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$.

第二步: 将求积区间再二等分一次.

2n+1个求积节点

$T_{2n} = \frac{h/2}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{2n-1} f(x_i) + f(b)\right]$.

$T_{2n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)\left[f(x_i) + 2f(x_{i+\frac12}) + f(x_{i+1})\right]$.

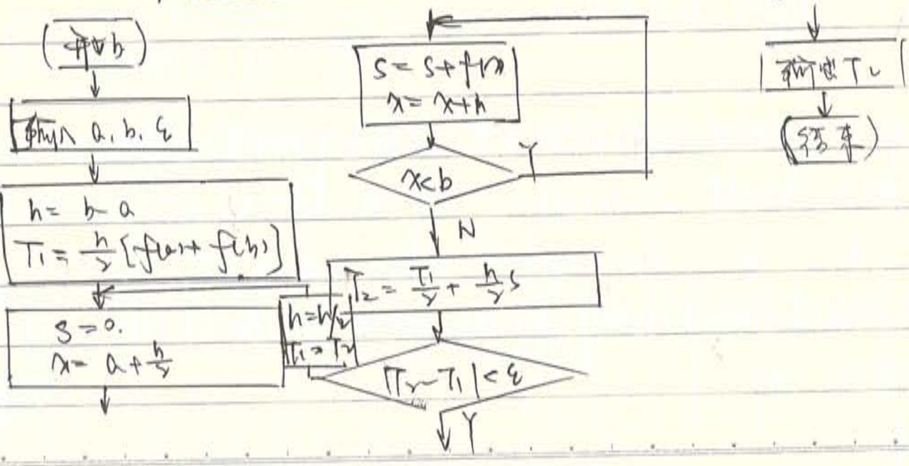
$= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac12})$.

$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac12})$

第三步: 判断.

若 $|T_{2n} - T_n| < \varepsilon$ 成立, 则二等分下的积分值即为结果.

否则, $\frac{h}{2} \Rightarrow h$, $2n \Rightarrow n$, $T_{2n} \Rightarrow T_n$, 重复第二步.



例 4-4

利用变步长梯形求积法计算 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$. 使误差不超过 10^{-4}.

解: 先对 $[0,1]$ 使用梯形公式.

$T_1=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=0.9207355$.

(2) 将积分区间二等分. $f(\frac{1}{2})=0.9588510$.

$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}\sum f(x_{k+\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}\times(0.9207355+0.9588510)=0.9397933$.

(3) 再将小区间二等分. $x=\frac{1}{4}$, $x=\frac{3}{4}$.

$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})]=0.9445135$.

⋮

n	1	2	4	8	16	32	64
	0.9588510	0.9397933	0.9445135	0.9456909	0.9459850	0.9460596	0.9460789

∵ $|T_{64}-T_{32}|<10^{-4}$. ∴ 取 $I\approx I_{64}=0.9460789$.

§4-4. Romberg 龙贝格求积算法

一. 数值算法中的加速收敛技巧 —— 外推算法

$T_1, T_2 \cdots T_k \cdots T$. $\{T_k\}$.

$\{\tilde{T}_k\}$. 构造 $\{\tilde{T}_k\}$, 使其逼近 T 速度更快

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的值 $f(0)$.

$f(h), f(\frac{h}{2}), f(\frac{h}{4}) \cdots f(\frac{h}{2^k})$.

泰勒展开

$$f(h) = f(0) + \frac{h}{1!} f'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) + \frac{h^3}{3!} f'''(0) + \cdots$$

$$f(\tfrac{h}{2}) = f(0) + \frac{h/2}{1!} f'(0) + \frac{(h/2)^2}{2!} f''(0) + \frac{(h/2)^3}{3!} f'''(0) + \cdots$$

若 $f'(0) \neq 0$, $f(h), f(\frac{h}{2})$ 逼近 $f(0)$ 的阶 $O(h)$.

令 $f_1(h) = 2f(\frac{h}{2}) - f(h) = f(0) + (\frac{h}{2})^2 f''(0) - \frac{h^2}{2} f''(0)$

若 $f''(0) \neq 0$. $f_1(h)$ 逼近 $f(0)$ 的阶 $\cdots$ $O(h^2)$.

$\therefore$ $f_1(h), f_1(\frac{h}{2}), f_1(\frac{h}{2^2}), \cdots f_1(\frac{h}{2^k}) \cdots$ 更快收敛于 $f(0)$.

$f_2(h) = \frac{4}{3} f_1(\frac{h}{2}) - \frac{1}{3} f_1(h)$.

若 $f'''(0) \neq 0$, $f_2(h)$ 逼近于 $f(0)$ 的误差阶为 $O(h^3)$.

$f_2(h), f_2(\frac{h}{2}), f_2(\frac{h}{2^2}) \cdots f_2(\frac{h}{2^k})$ 更快收敛于 $f(0)$

外推算法：利用若干个已经算出的近似值做适当组合以求更精确的近似值的加速收敛的方法.

二. Romberg 算法

$I = \int_a^b f(x)\,dx$.

记 $T_1(h) = T_n$. $I \approx T_1(h) = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 充分光滑时, 可证明 $T_1(h)$ 逼近 I 的截断误差 $I - T_1(h) = a_1 h^2 + a_2 h^4 + \cdots + a_k h^{2k} + \cdots$, 其中 a_k 是与 h 无关的常数.

* $$\boxed{T_{m+1}(h) = \frac{4^m T_m(\frac{h}{2}) - T_m(h)}{4^m - 1}} \quad m = 1, 2 \cdots$$

$T_{m+1}(h)$ 逼近 I 的误差为 $O(h^{2(m+1)})$. Romberg 算法.

1. 当 $m=1$ 时. $T_2(h) = \frac{4T_1(\frac{h}{2}) - T_1(h)}{3}$

$\because$ $T_1(h) = T_n$ $T_1(\frac{h}{2}) = T_{2n}$.

$T_2(h) = \frac{4}{3} T_{2n} - \frac{1}{3} T_n = S_n$.

$\therefore$ $\boxed{S_n = \frac{4T_{2n} - T_n}{4-1}}$ —— 梯形加速公式

No
Date

2. 当 $m=2$ 时. $T_3(h)=\dfrac{4^2T_2(\frac{h}{2})-T_2(h)}{4^2-1}$

$\because T_2(h)=S_n \quad T_2(\frac{h}{2})=S_{2n}$.

$\therefore T_3(h)=\dfrac{16S_{2n}-S_n}{15}=C_n$

$\boxed{C_n=\dfrac{4^2S_{2n}-S_n}{4^2-1}}$ — 抛物线加速公式.

3. 当 $m=3$ 时.

$T_4(h)=\dfrac{4^3T_3(\frac{h}{2})-T_3(h)}{4^3-1}$

$\boxed{R_n=\dfrac{4^3C_{2n}-C_n}{4^3-1}}$ — Cotes 加速公式

Romberg 公式

注: 当 $m\geq4$ 时.

$\dfrac{4^m}{4^m-1}\approx1,\ -\dfrac{1}{4^m-1}\approx0.$

$\therefore m\leq3.$

二. 计算步骤.

1. 计算初值. $T_1=\dfrac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$.
2. 把区间逐次分半. $h=\dfrac{b-a}{2^i},\ i=0,1,2\cdots$

计算 $T_{2n}=\dfrac{1}{2}T_n+\dfrac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})$. $\quad n=2^i$.

3. 利用外推加速公式计算加速值.

梯形加速公式: $S_n=T_{2n}+\dfrac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$.

抛物线加速公式: $C_n=S_{2n}+\dfrac{1}{15}(S_{2n}-S_n)$

Romberg 公式: $R_n=C_{2n}+\dfrac{1}{63}(C_{2n}-C_n)$.

4. 精度控制.

当 $|R_{2n}|\leq1$ 满足 $|R_{2n}-R_n|<\varepsilon$.

当 $|R_{2n}|>1$ 满足 $\left|\dfrac{R_{2n}-R_n}{R_{2n}}\right|<\varepsilon$. 终止.

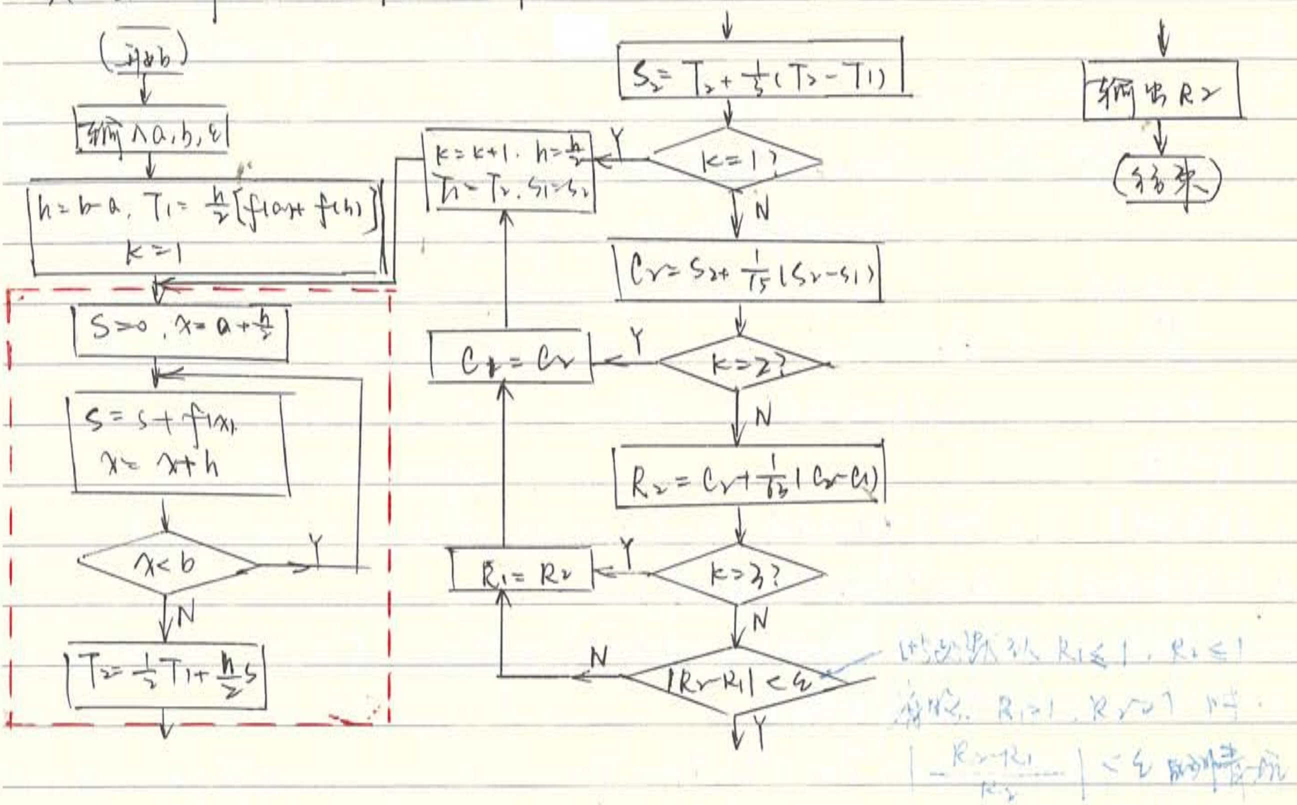
$\int_a^b f(x)\,dx\approx R_{2n}$.

否则重复 2, 3, 4. 直到满足精度为止.

例4-5.

计算 $\pi=\int_0^1\dfrac{4}{1+x^2}dx$.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0 (n=1)	3			
1 (n=2)	3.1	3.133333		
2 (n=4)	3.131176	3.141569	3.142118	
3 (n=8)	3.138988	3.141593	3.141594	3.141583



§4-5 Gauss 求积公式.

一. Gauss 积分问题的提出.

$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$

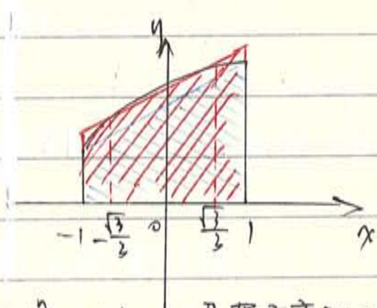
若 $x_0=-1$, $x_1=1$.

$\int_{-1}^{1} f(x) = f(-1)+f(1)$ $\quad m=1$. $\quad$ m+1 精度

依次令 $f(x)=1, x, x^2, x^3$ 代入上式. $\quad$ m+2ⁿ

$$\begin{cases} w_0+w_1=2. \\ w_0x_0+w_1x_1=0. \\ w_0x_0^2+w_1x_1^2=\frac{2}{3}. \\ w_0x_0^3+w_1x_1^3=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0=1 \\ w_1=1 \\ x_0=-\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases} \text{Gauss 点}$$

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f(\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(-\frac{\sqrt{3}}{3})$. $\quad m=3$



定义: 若一组节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$, 使 $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$ 具有最高代数精度为 $2n+1$ 次, 称此节点为 Gauss 点, 相应的求积公式称为 Gauss 求积公式.

二. Gauss 求积公式的构造和应用. [-1,1]

简便计算: ① 先利用区间 $[a,b]$ 上的 $n+1$ 次正交多项式确定 Gauss 点 $x_i \in [a,b]$.

$i=0,1,2,\cdots,n$

② 利用 Gauss 点, 确定求积系数 w_i $(i=0,1,2,\cdots n)$.

节点数	Gauss点	系数 w_i	余项 $R[f]$
2	±0.5773503	1.0000000	$f^{(4)}(\xi)/135$
3	±0.7745967	0.5555556	$f^{(6)}(\xi)/15750$
	0.0000000	0.8888889	
4	±0.8611363	0.3478548	$f^{(8)}(\xi)/34872875$
	±0.3399810	0.6521452	

高斯求积公式 是区间 $[-1,1]$.

$$\ast \quad \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)dt.} \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t_i\right) w_i.$$

令 $x = \frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t$.

例4-6.

利用Gauss求积公式计算 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1-0}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t}dt$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{\sin\frac{1}{2}(1+t)}{1+t}dt$$

$n=2$时，原式 $\approx \frac{\sin\frac{1}{2}(0.5773503+1)}{0.5773503+1} + \frac{\sin\frac{1}{2}(-0.5773503+1)}{-0.5773503+1} = 0.946 0411.$

$n=3$时，原式 $\approx \frac{\sin\frac{1}{2}(-0.7745907+1)}{-0.7745907+1}\times 0.5555556 + \frac{\sin\frac{1}{2}}{0+1}\times 0.8888889 + \frac{\sin\frac{1}{2}(0.7745967+1)}{0.7745967+1}\times$

$0.5555556 = 0.9460831.$　　需变步长梯形，分11次，2049个函数值.

§4-6. 数值微分

$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$.

$f'(x) \approx p_n'(x)$ —— 插值型求导公式.

第5章 非线性方程的数值解法.

§5—1. 引言.

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=f(x)$ $(a_n\neq0)$

若$f(x)=0$ 代数方程.

若$f(x)$含有三角函数,指数函数. —— 超越方程.

三个过程:

1. 判定根的存在性.

   方程有无根,若有根,有几个.

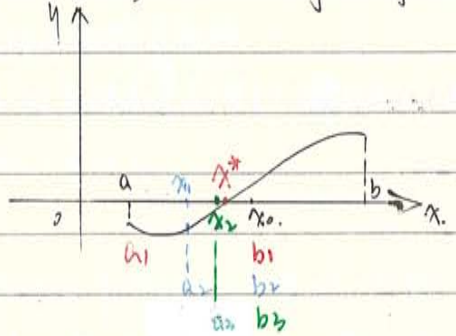
2. 根的分布.

   求有根的区间.

3. 根的精确化.

§5-2. 二分法.

$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(a)\cdot f(b)<0$. 据性质,在$[a,b]$上至少有一个根.



$x_0=\frac{1}{2}(a+b)$ $f(x_0)$

$[a,b]$, $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$ $\cdots$ $[a_k,b_k]$.

$b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)$. $b_2-a_2=\frac{b_1-a_1}{2}=\frac{b-a}{2^2}$.

$b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k}$

* $\boxed{|x^*-x_k|\le\frac{b_k-a_k}{2}=\frac{b-a}{2^{k+1}}}$ $\frac{b-a}{2^{k+1}}<\varepsilon$.

根的序列: $x_0,x_1,x_2,\cdots x_k\cdots$

$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$.

二分法算法.

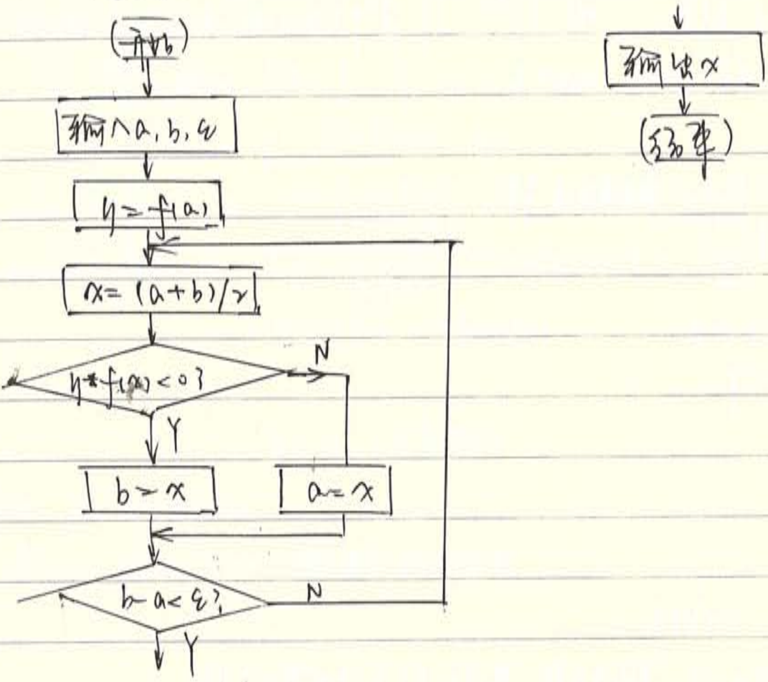
(1) 输入有根区间的端点a, b, 及ε, 计算 $y=f(a)$

(2) $x=\frac{a+b}{2}$.

(3) 若 $yf(x)<0$. 则 $b\Leftarrow x$, 转向(4) 否则 $a\Leftarrow x$ 转向(4)

(4) 若 $b-a<\varepsilon$, 则输出方程满足精度的根x, 结束, 否则转向(2).

二分法程序框图



例5-1.

用二分法求方程 $f(x)=\sin x-\frac{x^2}{4}=0$ 的非零实根的近似值？使误差不超过 10^{-2}.

$f(1.5)>0$. $f(2)<0$. $\therefore x^* \in [1.5, 2]$.

$\because \frac{b-a}{2^{k+1}}<\varepsilon$ $\qquad \therefore k \geq 5$.

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	1.5	2	1.75	0.218.
1	1.75	2	1.875	0.075
2	1.875	2	1.9375	−0.00496
3	1.875	1.9375	1.90625	0.0404.
4	1.90625	1.9375	1.921875	0.56.
5	1.921875	1.9375	1.9296875.	

$\therefore x^* = x_5 \approx 1.93$.

例5-2.

求方程 $f(x)=x^3-2x-5=0$ 在区间 $[2,3]$ 内的实根的近似值？并指出其误差？

解：$\because f(2)=-1<0$. $f(3)=16>0$.

$\therefore [2,3]$ 为有根区间

No
Date

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	2	3	2.5	+
1	2	2.5	2.25	+
2	2	2.25	2.125	+
3.	2	2.125	2.0625	−
4	2.0625	2.125	2.09375	−
5	2.09375	2.125	2.109375	+
6	2.09375	2.109375	2.1015625	

$|x^* - x_6| \le \frac{3-2}{2^7} = 0.0078125.$

$x^* \approx x^*_6 = 2.1015625.$

二分法：

优点，方法简单可靠，易于计算机实现，要求 $f(x)$ 只要求连续.

缺点，用于计算精度要求较高的近似根时，所需的时间较长.

§5-3. 迭代法.

一. 迭代法的推导原理.

$x_1 = \varphi(x_0).$

$x_2 = \varphi(x_1).$

$\vdots$

$x_{k+1} = \varphi(x_k) \qquad k=0,1,2,\cdots$

$\{x_k\}: x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$

$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*.$

例5-3.

已知方程 $x^3+4x^2-10=0$. 在区间 $[1,2]$ 上有一个根，用迭代法求此方程的根？

解：I. $x = x - x^3 - 4x^2 + 10$. 即 $\varphi_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10.$

II: $x^2 = \frac{10}{x} - 4x.$ $\quad x = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}.$ 即 $\varphi_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}.$

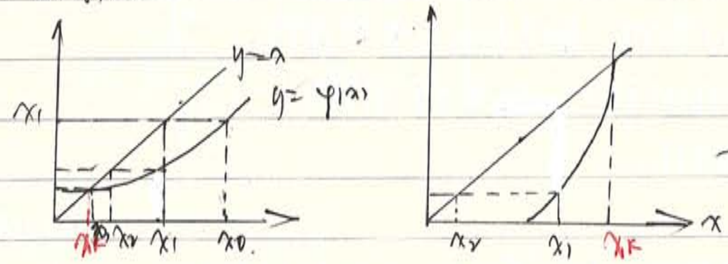
III: $4x^2 = 10 - x^3 \quad x = \frac{1}{2}\sqrt{10-x^3}.$ 即 $\varphi_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10-x^3}$

IV: $x = \sqrt{\frac{10}{4+x}}$ $\quad$ 即 $\varphi_4(x) = \sqrt{\frac{10}{4+x}}.$

29 Lines, 8mm

K	I	II	III	IV
0	1.5	1.5	1.5	1.5
1	-0.875	0.8165	1.2869538	1.3483997
2	6.732	2.9969	1.4025408	1.3673764
3	-4.697	$\sqrt{-8.65}$	1.3454584	⋮
	发散 X	X	⋮	1.3652300 (8)
			1.365410 (10)	
			⋮	
			1.3652302 (20)	
			⋮	
			1.3652300 (23)	

二. 几何意义.



发散.

三. 迭代法的收敛性.

定理. 设迭代函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的一阶导数，且 (1) 当 $x\in[a,b]$ 时，$a<\varphi(x)<b$，(2) 存在正数 $L<1$，使对任意 $x\in[a,b]$，有 $|\varphi'(x)|\le L<1$ 成立，则 (1) $x=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一解 x^*，且对任意初始近似值 $x_0\in[a,b]$，迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，$k=0,1,2,\dots$ 收敛，且 $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$.

(1) $|x^*-x_k|\le \frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|$

(2) $|x^*-x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$.

例5.4 求 $f(x)=x-e^{-x}$ 在 $x=0.5$ 附近的根，要求精确到小数点后三位?

设 $f(x)=x-e^{-x}$

$\because f(0.5)<0$, $f(0.6)>0$.

$\therefore [0.5, 0.6]$ 有1个根.

取 $x_{k+1}=e^{-k}$ $(k=0,1,2,\cdots)$.

则迭代函数 $\varphi(x)=e^{-x}$.

$|\varphi'(x)|=|e^{-x}|\le e^{-0.5}\approx 0.607<1$ $\Rightarrow$ 迭代过程收敛.

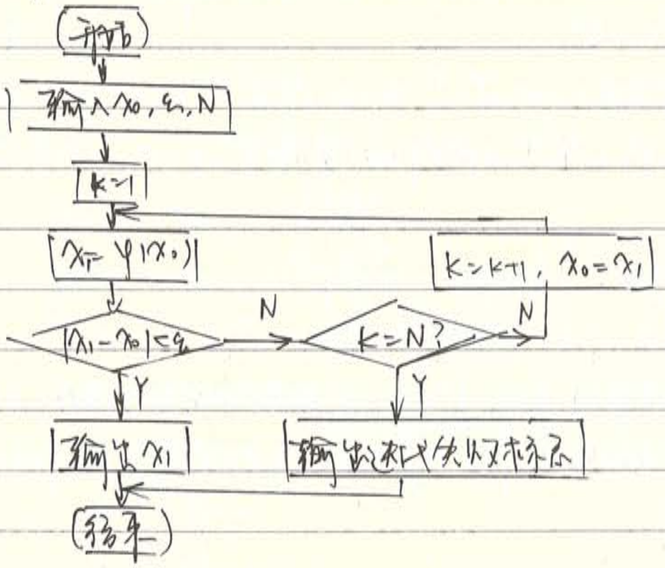
k	x_k	k	x_k
0	0.500	6	0.565
1	0.607	7	0.568
2	0.545	8	0.567
3	0.580	9	0.567
4	0.560		
5	0.571		

$\therefore x^* \approx x_9 = 0.567$.

四、算法.

1. 选取初始近似值 x_0，确定方程 $f(x)=0$ 的等价形式 $x=\varphi(x)$
2. 迭代：按公式 $x_1=\varphi(x_0)$ 计算 $\varphi(x_0)$ 的值.
3. 判别：若 $|x_1-x_0|<\varepsilon$，则终止迭代，取 x_1 为根的近似值.
   若不满足，则用 x_1 代替 x_0，转至第2步继续计算.
   如果迭代次数超过预先指定的次数 N 仍达不到精度要求，则认为方法发散.

五、程序框图.



§5-4. Newton法（切线法）.

$f(x)=0$ 非线性方程

线性化.

一. Newton迭代公式.

$f(x)=0$ 近似根 x_0.

泰勒展开

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$

$f(x)=0 \Rightarrow f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = 0. \Rightarrow x_1 = \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$f'(x_0) \neq 0.$

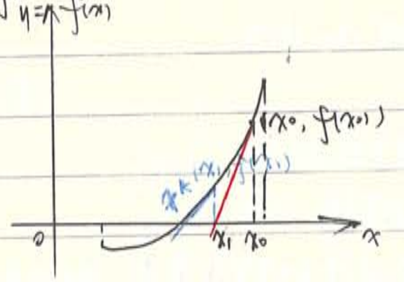
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$

$\vdots$

* $\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$ — Newton 迭代公式 $k=0,1,2,\cdots$

二. 几何意义.



1. 过 $(x_0, f(x_0))$ 作 $f(x)$ 的切线
切线方程: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0).$
与x轴相交: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
2. 过 $(x_1, f(x_1))$ 作 $f(x)$ 的切线
切线方程: $y - f(x_1) = f'(x_1)(x-x_1).$
与x轴相交: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ ……

$\{x_k\}$: $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*.$

三. Newton法的收敛性.

定理: 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上存在二阶导数, 且满足

① $f(a)\cdot f(b) < 0.$

② $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上不等于0. 单调性

③ $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号. 凹凸性一致

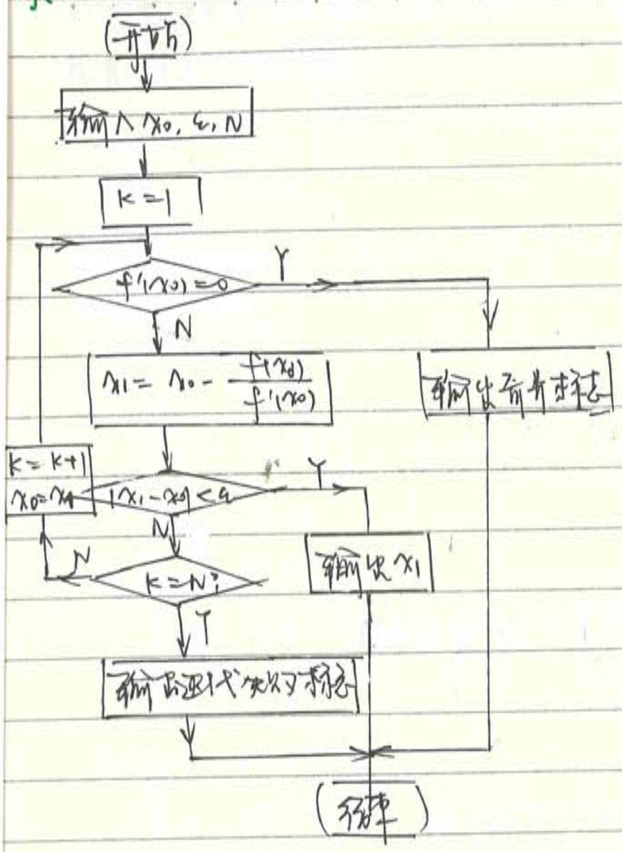
④ 在 $[a,b]$ 上任意选取满足条件 $f(x)\cdot f''(x_0) > 0$

的初始近似值 x_0, 则由Newton法产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛于方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上的唯一根.

四. 算法与程序框图.

1. 选定初始近似值 x_0, 计算 $f(x_0)$ 和 $f'(x_0)$.
2. 迭代. $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 得到 x_{k+1}, 再计算 $f(x_{k+1})$, $f'(x_{k+1})$.
3. 判别: 若 $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ 或 $|f(x_k)| < \varepsilon$, 则终止迭代, 并取 $x^* \approx x_{k+1}$, 否则 k加1 再转向②, 如果迭代次数超过预先设定的次数N, 仍达不到精度要求, 或计算中 $f'(x)=0$, 则认为方法失败.

No
Date



例 5—5.

用 Newton 法求方程 $x=e^{-x}$ 在 $x=0.5$ 附近的一个根?

令 $f(x)=x-e^{-x}$ $f'(x)=1+e^{-x}$

$\therefore x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$\therefore x_{k+1} = x_k - \frac{x-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

又 $\because f''(x) = -e^{-x} < 0$. $f(0.5)=0.5-e^{-0.5}<0$. $\Rightarrow f(0.5)\cdot f''(0.5)>0$.

取 $x_0=0.5$.

k	x_k
0	0.50000
1	0.57102.
2	0.56716.
3.	0.56714.

3. 简化 Newton 法和 Newton 下山法.

1. 简化 Newton 法

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{c}$. c—常数. (x_0 和 斜率)

2. Newton下山法.

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

λ 选取使得 $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$.

$|f(x_{k+1})| < \varepsilon_1$

$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_2$.

λ: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots$

§5-5. 弦截法.

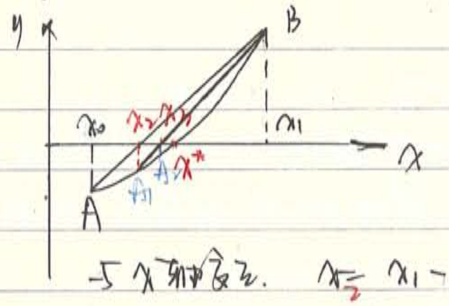
一、弦截法公式.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}).}$$ [illegible]

二、几何意义.



$f'(x) > 0$. $f''(x) > 0$.

弦AB直线方程.

$$\frac{y - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

与x轴交点. $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$

$\{x_k\}$ $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$.

三、算法与程序框图.

1. 准备：选定初始近似值 x_0, x_1, 并计算 $f(x_0)$, $f(x_1)$,
2. 迭代：按 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$, 计算 x_{k+1}, $f(x_{k+1})$
3. 判断. 若 $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_1$, 或 $|f(x_{k+1})| < \varepsilon_2$. 则停止迭代, 并取 $x^* = x_{k+1}$, 否则转向(2). 若迭代次数超过某个上界N, 则认为过程不收敛.

计算方法　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　通信1班　张某　1010421

1. 用代数精度定义直接验证抛物线求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$ 具有3次代数精度.

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$

当 $f(x)=1$ 时,

左边 $= b-a$，右边 $= \frac{b-a}{6}[1+4+1] = b-a$.

左边=右边

当 $f(x)=x$ 时,

左边 $= \frac{1}{2}x^2|_a^b = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$，右边 $= \frac{b-a}{6}[a+b+4\cdot\frac{a+b}{2}] = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$

左边=右边.

当 $f(x)=x^2$ 时,

左边 $= \frac{1}{3}x^3|_a^b = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$，右边 $= \frac{b-a}{6}[a^2+b^2+(a+b)^2] = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$.

左边=右边.

当 $f(x)=x^3$ 时,

左边 $= \frac{1}{4}x^4|_a^b = \frac{1}{4}(b^4-a^4)$

右边 $= \frac{b-a}{6}[a^3+b^3+4\cdot\frac{(a+b)^3}{8}] = \frac{1}{4}(a^3+b^3+ab^2+a^2b)(b-a) = \frac{1}{4}(b^4-a^4)$

左边=右边.

当 $f(x)=x^4$ 时.

左边 $= \frac{1}{5}x^5|_a^b = \frac{1}{5}(b^5-a^5)$

右边 $= \frac{b-a}{6}[a^4+b^4+4\cdot\frac{(a+b)^4}{16}] = \frac{5}{4}a^4+\frac{5}{4}b^4+a^3b+\frac{3}{2}a^2b^2+ab^3$.

左边 ≠ 右边.

即，求积公式对于次数为 $m=3$ 的多项式精确成立，对于 $m=4$ 的多项式不能精确成立. 故，抛物线求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$ 具有3次代数精度.

2. 试分别用复合梯形抛物线公式，根据表中数据计算 $\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$ 的近似值.

x	0	1/8	1/4	3/8	1/2
$f(x)$	4.00000000	3.93846154	3.76470588	3.50684932	3.20000000
x	5/8	3/4	7/8	1	
$f(x)$	2.87640449	2.56000000	2.26548673	2.00000000	

复合梯形:

$n=8$，$h=\frac{1}{8}$.

通信3班 张策 1010421

$$T_h = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{7} f(x_i) + f(b)\right]$$

$$= \frac{1}{16}[4.00000000 + 2.00000000 + 3.93846154 + 3.76470588 + 3.50684932 + 3.20000000$$
$$+ 2.87640449 + 2.56000000 + 2.26548673] = 3.13898850$$

即 $\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx \approx T_h = 3.13898850$.

复合抛物线：

$n=4,\quad h=\frac{1}{4}$.

$$S_h = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{i=0}^{3} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{i=1}^{3} f(x_i) + f(b)\right].$$

$$= \frac{1}{24}\left\{f(0) + f(1) + 4\left[f(\tfrac{1}{8}) + f(\tfrac{3}{8}) + f(\tfrac{5}{8}) + f(\tfrac{7}{8})\right] + 2\left[f(\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{3}{4})\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{24}[4+2+4(3.93846154+3.50684932+2.87640449+2.26548673)+2(3.76470588$$
$$+3.2+2.56)] = 3.14159250$$

即 $\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx \approx 3.14159250$

3. 用二分法求方程 $xe^x=1$ 在区间 $[0,1]$ 上的根，使误差小于 10^{-2}.

设 $f(x) = xe^x - 1$. $f(0) = -1 < 0$ $f(1) = e-1 > 0$

误差 $\frac{1}{2^{k+1}} < 10^{-2} \Rightarrow 2^{k+1} > 100 \Rightarrow k+1=7 \Rightarrow k=6$.

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	0	1	0.5	−
1	0.5	1	0.75	+
2	0.5	0.75	0.625	+
3	0.5	0.625	0.5625	−
4	0.5625	0.625	0.59375	+
5	0.5625	0.59375	0.578125	+
6	0.5625	0.578125	0.5703125	

方程的根 $x^* = x_6 = 0.5703125 \approx 0.57$.

4. 用弦截法求方程 $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 9 = 0$ 在 $(-2, -1.5)$ 内的根.

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1 \quad x \in (-2, -1.5) \quad f'(x) > 0$.

$f''(x) = 6x - 6 \quad x \in (-2, -1.5)$. $f''(x) < 0$.

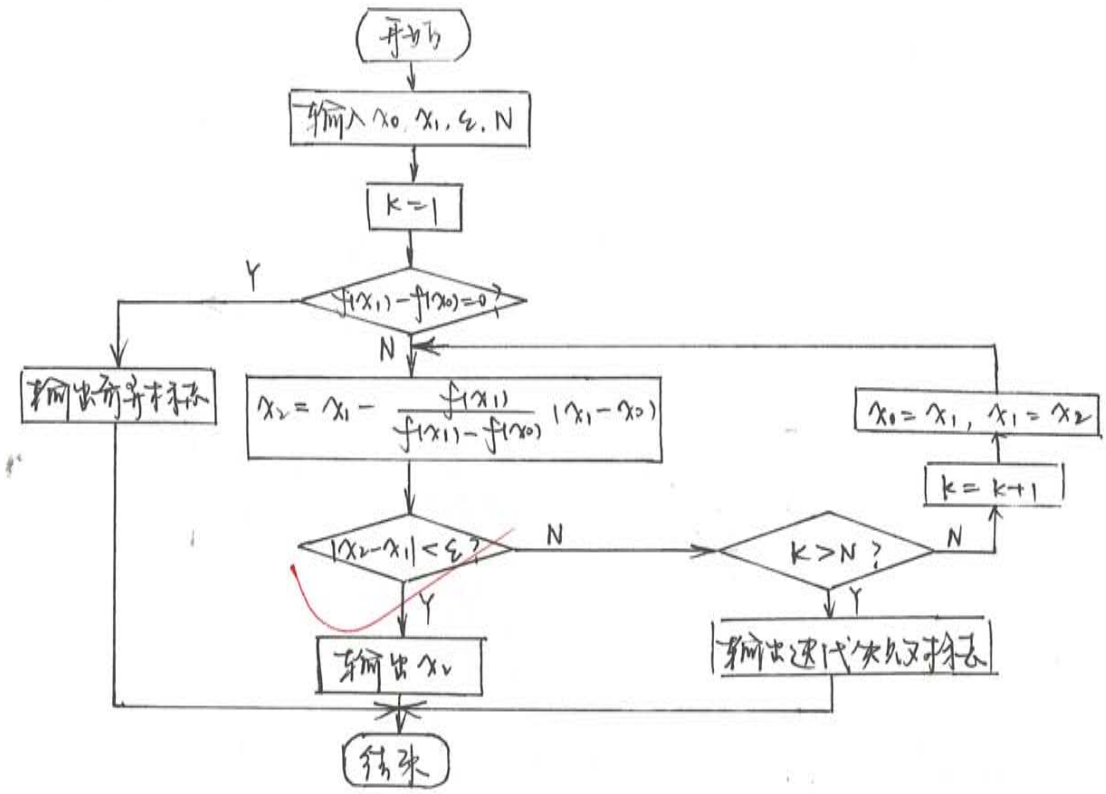
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

k	0	1	2	3	4
x_k	−2	−1.5	−1.52	−1.52516711	−1.52510209
$f(x_k)$	−9	0.375	0.076992	-9.8119×10^{-4}	

方程在 $(-2, -1.5)$ 内的根 $x^* \approx -1.5251$.

通信2班 张寒 1010427

画出弦截法的程序框图.



6. 用弦截法计算 $x=e^{-x}$ 在 $x=0.5$ 附近的根.

设 $f(x)=x-e^{-x}$

$f(0.5)=-0.106530659<0$ $f(0.6)=0.051188363>0$.

$f(0.5)f(0.6)<0$. $\Rightarrow$ 存在方程的一个根 $x^*\in(0.5, 0.6)$.

k	x_k	$f(x_k)$
0	0.5	-0.106530659
1	0.6	0.051188363
2	0.567544585	6.288405437×10^{-4}
3	0.567140916	

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}).$$

$x=e^{-x}$ 在 0.5 附近有一个根 $x^*\approx 0.567$.

7. 求方程 $x^x=10$ 的实根，要求精确到 10^{-6} (利用 Newton 法)

$x^x=10 \Rightarrow \lg x^x = \lg 10 \Rightarrow x\lg x = 1$

设 $f(x)=x\lg x-1$. $f'(x)=\lg x + x\cdot\frac{1}{x\ln 10} = \lg x + \frac{1}{\ln 10}$. $f(2)\cdot f(3)<0$.

k	x_k	$f(x)$	$f'(x)$
0	2.5	-5.14997832×10^{-3}	0.83223449
1	2.506188134	3.323467026×10^{-6}	0.833308151
2	2.506177352	$-5.661256301\times10^{-6}$	0.833306282
3	2.506184146	2.34178×10^{-10}	0.83330746
4	2.506184146		

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

方程 $x^x=10$ 的实根

$x^*\approx 2.506184146$.

No
Date

作业2：

1. 用代数精度定义直接验证抛物线求积公式 $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$ 具有3次代数精度.

2. 试分别用复合梯形和抛物线公式根据表中数据计算 $\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$ 的近似值.

x	0	1/8	1/4	3/8	1/2
$f(x)$	4.00000000	3.93846154	3.76470588	3.50684932	3.20000000
x	5/8	3/4	7/8	1	
$f(x)$	2.87640449	2.56000000	2.26548673	2.00000000	

3. 用二分法求方程 $xe^x=1$ 在区间 $[0,1]$ 上的根，使误差小于 10^{-2}.

4. 用弦截法求方程 $f(x)=x^3-3x^2-x+9=0$ 在 $(-2,-1.5)$ 内的根.

5. 画出弦截法的几何图.

6. 用弦截法计算 $x=e^{-x}$ 在 $x=0.5$ 附近的根.

7. 求方程 $x^x=10$ 的实根，要求精确到 10^{-6}（利用Newton法）.

解：$[2,3]$. $f(x)=x\lg x-1$. $x_0=3$.

29Lines, 8mm

No
Date

第六章 线性代数方程组的数值解法

§6-1 引言

研究数值解法的必要性.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

系数行列式 $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{cases}$$

"×" $n!(n-1)(n+1)$

"÷" n

$n=20$

乘除次数: $20!\cdot(19)(21) \approx 9.7\times10^{20}$.

计算机速度. 1.23×10^{5} 次/秒

所用时间 7.8×10^{15} s $=2.4\times10^{8}$ 年.

1、消去法. 2、分解法.(LU分解法) 3、迭代法

§6-2. Gauss 消去法

一. 消元过程.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' & b_2' \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nn}' & b_n' \end{pmatrix}$$

$n=4$ 为例.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45} \end{cases}$$

记 $a_{ij} = a_{ij}^{(0)} \to$ 变化次数.

$i=1,2,3,4.$

$j=1,2,3,4,5.$

No
Date

1. 第1列元素变0.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}^{(1)} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & a_{25}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} & a_{35}^{(1)} \\ 0 & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} & a_{45}^{(1)} \end{pmatrix}^{(2)}$$

第2行元素 ⇐ 第2行元素 − a_{21} × 第1行元素 / a_{11}.

$a_{21}^{(1)} = a_{21} - a_{21} \times a_{11}/a_{11}$

$a_{22}^{(1)} = a_{22} - a_{21} \times a_{12}/a_{11}$.

$a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{21} \times a_{13}/a_{11}$

$a_{24}^{(1)} = a_{24} - a_{21} \times a_{14}/a_{11}$

$a_{25}^{(1)} = a_{25} - a_{21} \times a_{15}/a_{11}$.

$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{ik} \times a_{kj} / a_{kk}$.

$k=1, i=2, j=2,3,4,5$.

$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{ik} \times a_{kj} / a_{kk}$.

$k=1.\ i=3.\ j=2,3,4,5$.

$$\boxed{\begin{gathered} a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{ik} \times a_{kj} / a_{kk}. \\ k=1.\ i=2,3,4.\ j=2,3,4,5. \end{gathered}}$$

2. 第二列元素变0.

$$(2) \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & a_{25}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & a_{35}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & a_{45}^{(2)} \end{pmatrix}^{(3)}$$

第3行元素 ⇐ 第3行元素 − $a_{32}^{(1)}$ × 第2行元素 / $a_{22}^{(1)}$.

" 4 " ⇐ " 4 " − $a_{42}^{(1)}$ × " 2 " / $a_{22}^{(1)}$

$$\boxed{\begin{gathered} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{ik}^{(1)} a_{kj}^{(1)} / a_{kk}^{(1)} \\ k=2,\ i=3,4.\ j=3,4,5. \end{gathered}}$$

3. 第3列元素变0.

$$(3) \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & a_{25}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & a_{35}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} & a_{45}^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{gathered} a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{ik}^{(2)} a_{kj}^{(2)} / a_{kk}^{(2)} \\ k=3,\ i=4.\ j=4,5 \end{gathered}}$$

28Lines, 8mm

4. 合并后.

$$\boxed{a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}}$$

$k = 1, 2, 3.$ $i = k+1 \sim 4.$ $j = k+1 \sim 5.$

推广到n阶.

$$\boxed{\begin{array}{l} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}. \\ k = 1 \sim (n-1). \quad i = (k+1) \sim n. \quad j = (k+1) \sim (n+1). \end{array}}$$

上三角方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2,n+1}^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = a_{3,n+1}^{(2)} \\ \cdots\cdots \\ a_{n-1,n-1}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-2)}x_n = a_{n-1,n+1}^{(n-2)} \\ a_{n,n}^{(n-1)}x_n = a_{n,n+1}^{(n-1)} \end{cases}$$

二. 回代过程.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15}. \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{(2)} \\ a_{44}^{(3)}x_4 = a_{45}^{(3)}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_4 = a_{45}^{(3)} / a_{44}^{(3)} \\ x_3 = (a_{35}^{(2)} - a_{34}^{(2)} x_4) / a_{33}^{(2)} \\ x_2 = [a_{25}^{(1)} - (a_{23}^{(1)} x_3 + a_{24}^{(1)} x_4)] / a_{22}^{(1)}. \\ x_1 = a_{15} - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) / a_{11}. \end{cases}$$

$$\boxed{x_k = (a_{k5}^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^{4} a_{kj}^{(k-1)} x_j) / a_{kk}^{(k-1)} \quad k = 4, 3, 2, 1}$$

推广到n阶: $\boxed{x_k = (a_{k,n+1}^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k-1)} x_j) / a_{kk}^{(k-1)}. \quad k = 1, 2, 3, \cdots, n.}$

§6-3. 列主元消去法

一. 主元素对解的影响

主元素 —— 系数矩阵中处于主对角线上的元素. a_{ij} . $i=j$.

主元优势 —— $|a_{ij}|$ 在本列中最大 $(i=j)$

主元很小 —— 对舍入误差的影响很大.

选列主元 ——

例 6-1.

已知 $n=3$ 的三阶线性方程组

$$\begin{cases} 0.50x_1 + 1.10x_2 + 3.10x_3 = 6.00 \\ 2.00x_1 + 4.50x_2 + 0.36x_3 = 0.02 \\ 5.00x_1 + 0.96x_2 + 6.50x_3 = 0.96 \end{cases}$$

试求此线性方程组的解.

解法一: Gauss 消去法

① 消元过程 $\begin{pmatrix} 0.50 & 1.10 & 3.10 & 6.00 \\ 2.00 & 4.50 & 0.36 & 0.02 \\ 5.00 & 0.96 & 6.50 & 0.96 \end{pmatrix} \rightarrow$ 未考虑舍入误差

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0.50 & 1.10 & 3.10 & 6.00 \\ 0 & 0.10 & -12.0 & -24.0 \\ 0 & 0 & -1220 & -2460 \end{pmatrix} \quad \text{回代} \quad \begin{cases} x_1 = -5.80 \\ x_2 = 2.40 \\ x_3 = 2.02 \end{cases} \quad x^* = \begin{pmatrix} -2.60 \\ 1.00 \\ 2.00 \end{pmatrix}$$

解法二: 列主元消去法

① $\begin{pmatrix} 5.00 & 0.96 & 6.50 & 0.96 \\ 2.00 & 4.50 & 0.36 & 0.02 \\ 0.50 & 1.10 & 3.10 & 6.00 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5.00 & 0.96 & 6.50 & 0.96 \\ 0 & 4.12 & -2.24 & -0.36 \\ 0 & 0 & 2.99 & 5.99 \end{pmatrix}$

② 回代. $x = \begin{pmatrix} -2.6045 \\ 1.0008 \\ 2.0033 \end{pmatrix}$

二. 选列主元做行交换

三. 算法及程序框图.

对 $k=1, 2, \cdots, n-1$.

1. 消元过程

(1) 按列选主元：确定 r，使满足 $|a_{rk}| = \max\limits_{k\le i\le n} |a_{ik}|$

若 $a_{rk}=0$，说明系数矩阵奇异，则停止计算并输出信息.

(2) 行交换：若 $r>k$，则交换，则交换第 r 行和第 k 行.

(3) 消元计算：对 $i=k+1, k+2, k+3, \cdots n$,

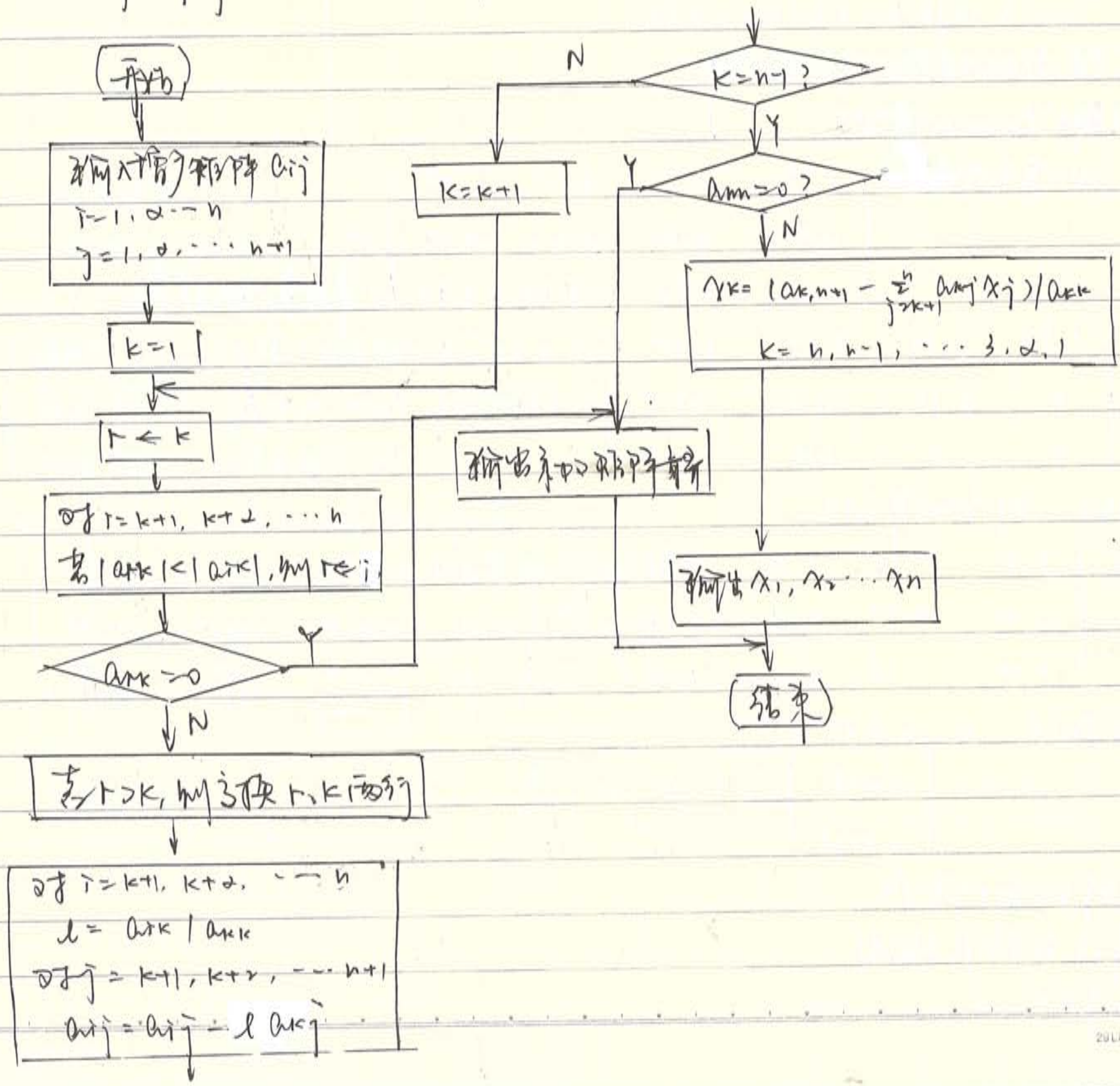
$j=k+1, k+2, k+3, \cdots n+1$.

计算 $a_{ij}=a_{ij}-a_{ik}\cdot a_{kj}/a_{kk}$

2. 回代过程

若 $a_{nn}=0$，则系数矩阵奇异.

否则，计算 $x_k \Leftarrow (a_{k,n+1}-\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j)/a_{kk}$　$k=n, n-1, n-2, \cdots, 3, 2, 1$.



§3-4. 用LU分解法求解线性方程组.

一. LU分解法的指导思想.

$Ax = b$. $L\underbrace{Ux}_{Y} = b$.

一次分解, 两次回代.

$A = LU$ $Ux = Y$ $LY = b \Rightarrow Y$.   单位下三角阵L   上三角阵U.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

—— Doolittle分解法.
（杜利特尔）

$$= \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

下三角阵L   单位上三角阵U.

—— Crout 分解法.
（克劳特）.

二. Crout 分解法.

1. 分解

$$\boxed{\begin{aligned} l_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \qquad j \le i. \quad i=1,2,\cdots n. \\ u_{ij} &= \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}\right)/l_{ii} \qquad i<j \quad j=2,3,\cdots n. \end{aligned}}$$

2. 求解.

① $LY = b$.
$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

② $UX = Y$

$$\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$x_n = y_n$

$x_j = y_j - \sum_{k=j+1}^{n} u_{jk} x_k$.

$j = n-1, n-2, \cdots, 2, 1$.

三. Doolittle 分解法.

1. 分解

$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad j = i, i+1, \cdots n$.

$l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}) / u_{jj} \quad i = j+1, \cdots n$.

2. 求解.

① $LY = b$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

$y_1 = b_1$

$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k$.

$i = 2, 3, \cdots n$.

② $UX = Y$.

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$x_n = y_n / u_{nn}$

$x_i = (y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k) / u_{ii}$

$i = n-1, n-2, \cdots, 3, 2, 1$

§6-5. 三对角线方程组的追赶法.

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & 0 & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & 0 & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} l_1 & & & & \\ m_2 & l_2 & & & \\ & m_3 & l_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & m_n & l_n \end{pmatrix} \qquad \tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & & & \\ & 1 & u_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & u_{n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

No
Date

$y_1, y_2, \cdots, y_n$ —— "追"

$x_n, x_{n-1}, \cdots x_3, x_2, x_1$ —— "赶"

§6-6 Jacobi（雅可比）迭代法

一. 迭代格式.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k-1)}) / a_{11} \\ x_2^{(k)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k-1)}) / a_{22} \\ \cdots\cdots \\ x_n^{(k)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - a_{n2}x_2^{(k-1)} - \cdots - a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k-1)}) / a_{nn} \end{cases}$$

$$\boxed{x_i^{(k)} = \Big(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\Big) / a_{ii}} \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

$x_1^{(0)}, \ x_2^{(0)}, \ \cdots \ x_n^{(0)}$

$x_1^{(1)}, \ x_2^{(1)}, \ \cdots, x_n^{(1)}$

$x_1^{(2)}, \ x_2^{(2)} \ \cdots \ x_n^{(2)}$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$x_1^{(k)} \quad x_2^{(k)} \quad \cdots \quad x_n^{(k)}$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{k} = x_i^{*}, \quad i = 1, 2, \cdots n$

二. Jacobi 迭代公式.

* $$\boxed{\begin{array}{l} x_i^{(k)} = \Big(b_i - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\Big) / a_{ii} \\ i = 1, 2, \cdots n, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots\cdots \end{array}}$$

迭代的终止条件.

1. 取相邻两次解的每一个分量之差的绝对值 $|\Delta x_i| \le \varepsilon$, 即 $|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \le \varepsilon$. $i = 1, 2, \cdots n$.

2. 取相邻两次解的每个分量之差的绝对值最大的一个 $|\Delta x_i|_{max} \le \varepsilon$, 即 $|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|_{max} \le \varepsilon$. $i = 1, 2, 3, \cdots n$.

29Lines, 8mm

三、迭代收敛的条件.

1. 给定方程组的特性.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

方一: $\begin{cases} x_1 = 5 - 2x_2 \\ x_2 = 5 - 3x_1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1^{(k)} = 5 - 2x_2^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = 5 - 3x_1^{(k-1)} \end{cases}$

K	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0	0
1	5	5
2	-5	-10
⋮	⋮	⋮
5	145	110

初值一般构造为0.

迭代过程发散.

方二: $\begin{cases} x_2 = (5 - x_1)/2 \\ x_1 = (15 - x_2)/3. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2^{(k)} = (5 - x_1^{(k-1)})/2 \\ x_1^{(k)} = 15 - x_2^{(k-1)})/3. \end{cases}$

迭代过程收敛.

K	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0	0
1	1.666667	2.500000
⋮	⋮	⋮
5	1.018519	2.013889
⋮		
8	0.999778	1.998457
9	1.000514	2.000386.

2. 迭代收敛条件.

$$L = \max_{1\le i\le n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \quad \text{or} \quad L = \max_{1\le j\le n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2} . \quad L < 1$$

$$\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1 \qquad \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1$$

$L<1$ $\begin{cases} L\approx 1 & \text{收敛速度很慢。} \\ L\ll 1 & \text{收敛速度很快。} \end{cases}$ 迭代过程收敛。

$L>1$ 迭代过程发散。

例 6-2.

设有三阶线性方程组 $\begin{cases} 8x_1-3x_2+2x_3=20. \\ 4x_1+11x_2-x_3=33 \\ 6x_1+3x_2+12x_3=36. \end{cases}$，写出Jacobi迭代公式，

并验算其敛散性。

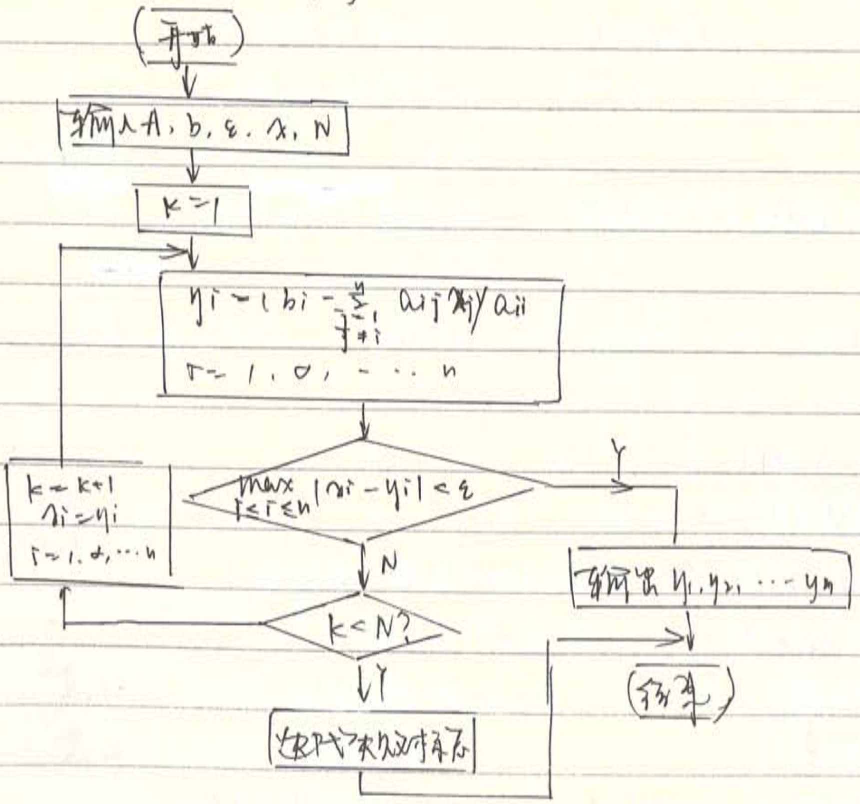
$$\begin{cases} x_1=(20+3x_2-2x_3)/8 \\ x_2=(33-4x_1+x_3)/11 \\ x_3=(36-6x_1-3x_2)/12. \end{cases}$$

$$\max_i\left\{\frac{5}{8},\ \frac{5}{11},\ \frac{9}{12}\right\}=\frac{9}{12}<1$$

$$\max_j\left\{\frac{114}{132},\ \frac{60}{96},\ \frac{30}{88}\right\}=\frac{114}{132}<1$$

∴上述迭代公式收敛.

四. Jacobi迭代程序框图.



§6-7. Seidel(赛德尔)迭代法.

一. 格式.

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} \to \cdots$$

例 6-3.

求解
$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36. \end{cases}$$

分别用 Jacobi 与 Seidel 迭代求解.

$$x_1^{k} = (20 + 3x_2^{(k-1)} - 2x_3^{(k-1)})/8$$
$$x_2^{k} = (33 - 4x_1^{(k)} + x_3^{(k-1)})/11$$
$$x_3^{k} = (36 - 6x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)})/12$$

	Jacobi			Seidel		
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0	0	0	0
1.	2.5000	3.0000	3.0000	2.5000	2.0909	1.3378.
⋮						
6				3.0000	2.0000	1.0000.
⋮						
8	3.0002	2.0006	0.9999			

① Seidel 迭代收敛速度要快于 Jacobi.

② Jacobi 需要2组存储空间. 而 Seidel 迭代只需一组即可.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11}. \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22}. \\ \cdots \\ x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})/a_{nn}. \end{cases}$$

No
Date

二. Seidel 迭代公式.

* $\boxed{x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)})/a_{ii} \quad i=1,2,\cdots,n \quad k=0,1,2,\cdots}$

§6-8. SOR 迭代法.(超松弛)

SOR: Successive Over Relaxation Method

一. 计算公式.

* Seidel 迭代法: $\tilde{x}_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)})/a_{ii}$

* 线性加速公式. $x_i^{(k+1)} = w \tilde{x}_i^{(k+1)} + (1-w) x_i^{(k)}$

w —— 线性加权因子(松弛因子)

$$x_i^{(k+1)} = w(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)})/a_{ii} + (1-w) x_i^{(k)}$$

$$= x_i^{(k)} + w[(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)})/a_{ii} - x_i^{(k)}]$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + w[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}]/a_{ii}$$

$0 < w < 2$.

$w>1$ 超松弛迭代.

$w<1$ 低松弛迭代.

$w=1$ Seidel 迭代.

例 6-4. 求

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30 \\ -x_2 + 4x_3 = -24 \end{cases}$$

的线性方程组的解.

SOR 迭代公式.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \frac{w}{4}(24 - 4x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \frac{w}{4}(30 - 3x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} - 4x_2^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + \frac{w}{4}(-24 + x_2^{(k+1)} - 4x_3^{(k)}) \end{cases}$$

取 $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\varepsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-7}$.

若 $w=1$, 需迭代 34 次.

若 $w=1.25$. 迭代 14 次.

$\begin{cases} \text{原始判别} \\ \text{残迹判别} \\ \text{组合判别} \end{cases}$

1.21 下午 2:00 二主 B104. 带计算器 100分钟.

考试:

1. 计算题 2. 简答题 2-3道 3. 算法(程序框图)题 1道

第一章. 绪论

标准: ①②③.

第二章. 插值法.

一. Lagrange 插值,余项. $n \le 3$.

分段低次插值. $L_n(x)$.

二. 牛顿插值,余项. $n \le 3$.

三. 等距节点, Newton 前插,后插.

余项.

第三章.

$S(x)$ 法方程组. 会找拟合模型. (3步).

第四章.

一. 插值型求积公式. (余项)

二. 代数精度

×三. Newton-Cotes 求积公式

"余项不考"

四. 复合求积法.

五. 龙贝格 求积法

六. 高斯求积公式

七. 变步长梯形求积公式

第五章.

二分法、迭代法，切线法，弦截法.

第六章.

一. 消元法. Gauss 消去法.
列主元消去法.

1. 消元过程 2. 回代过程 算法.

二. 直接分解法. Crout 分解法
Doolittle 分解法

A = LU. 一次分解，两次回代.

三. 迭代法. Jacobi
Seidel
SOR