NO.　　DATE.

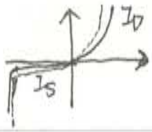
计算机与控制工程学院

信息安全专业

王钰（1310670）

NO. DATE.

PN结伏安特性



T↑ → ……

	P型	N型
杂质	+3价	+5价
	空穴>本征>电子	电子>本征>空穴

10.13(一).

一. 二极管模型

直流电阻 $\frac{V_D}{I_D}$

1. 大信号模型 → 直流模型

$I_D = I_S(e^{\frac{V_D}{V_t}}-1)$

V_D 外加电压，$\begin{cases}\text{反偏} & V_D\text{取负}\\ \text{正偏} & V_D\text{取正}\end{cases}$

V_t 热电势. 室温下 $V_t = 26mV$

I_S：反向饱和电流

① $V_D \gg V_t = 26mV$ 时. (如 $V_D = 130mV$，$e^{\frac{V_D}{V_t}} = 148 \gg 1$)

$I_D = I_S \cdot e^{\frac{V_D}{V_t}}$

② $V_D \ll -V_t = -26mV$ 时 ($V_D = -130mV$. $e^{\frac{V_D}{V_t}} = 0.0067 \ll 1$)

$\therefore I_D = -I_S$

※ 加正向偏压时：

(1) $\because I_S = A J_S$（A：结面积，J_S：反向电流密度）$\begin{cases}\text{两个同材料的二极管并联，电流大一倍.}\\ \text{两个串联. 面积大的端电压小}\end{cases}$

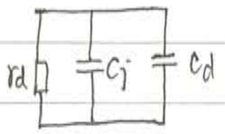
(2) 电流升高10倍，正向压降的增量为 60mV. ($\Delta V_D = 60mV$)

电流加倍 ($1\to2, 2\to4, 4\to8$) $\Delta V_D = 18mV$

(3) V_D 的温度系数为 $-2mV/°C$. 即每升高1°C，V_D 下降2mV.

二. 小信号模型 → 交流模型.

① 正偏时



C_j 势垒电容

C_d 扩散电容.

加正偏压，势垒区变窄

加反偏压，势垒区变宽.

微变电阻 $r_d = \frac{dV_D}{dI_D} = \frac{V_t}{I_D}$

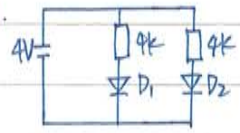
$= \frac{26mV}{I_D}$ ($T=300K$)

② 反偏时

$r_d = \infty$

练习：

1.

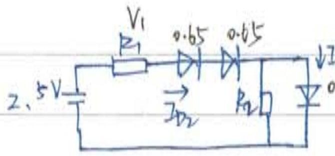


已知 $V_{D_1} = 0.7V$ $V_{D_2} = 0.3V$ 求通过 D_1, D_2 的电流

解：D_1, D_2 都导通，则 $V_{D_1} = 0.7V$ $V_{D_2} = 0.3V$

$\therefore I_1 = \frac{4-0.7}{4k} = \cdots$ $\quad I_2 = \frac{4-0.3}{4k}$

2.



$R_2 = 1k$. $V_D = 0.65V$

求 R_1 使 $2I_{D_1} = I_{D_2}$.

$\begin{cases} I_{D_1} = I_{D_2} - I_2 \\ 2I_{D_1} = I_{D_2}\end{cases}$

$I_{D_2} = \frac{0.65}{1k} = 0.65mA$

$I_{D_2} = I_1 = \frac{5-0.65\times3}{R_1}$

分析要点：二极管的工作状态

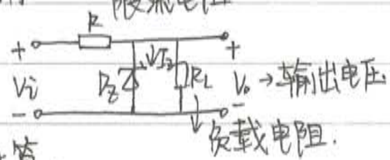
方法：令二极管断开，确定二极管两端电位差. 若大于 V_{on} 则 ✓

存在多个时. 令其两端电位差最大的先导通且端电压为压降 依次判断

二. 二极管的应用

1. 稳压电路

工作在反向击穿区



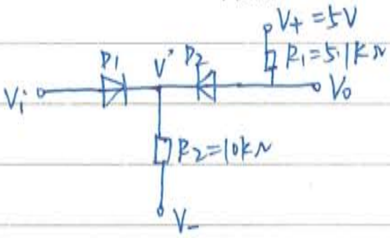
$V_i \uparrow \rightarrow I_D \uparrow$

$R_L \uparrow \rightarrow I_D \uparrow$

※ 稳压电阻的计算.

$$\begin{cases} \dfrac{V_{imax} - V_o}{R} - \dfrac{V_o}{R_{Lmax}} \le I_{Zmax} \\ \dfrac{V_{imin} - V_o}{R} - \dfrac{V_o}{R_{Lmin}} \ge I_{Zmin} \end{cases}$$

3.



当 $V_i = 0V$ 或 $V_i = 4V$ 时，求 V_o，i_{d1}，i_{d2}

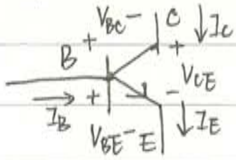
① $V_i = 0V$ 时.

$I_C = I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}\left(1+\frac{V_{CE}}{V_A}\right)$ ， $r_{ce} = \frac{V_A}{I_{CQ}}$

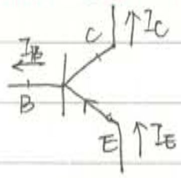
$r_{be} = \underset{}{\overset{=300}{r_b}} + (1+\beta)r_e = r_b + (1+\beta)\frac{V_T}{I_E}$

第三章 双极结型晶体管

1.



NPN



PNP

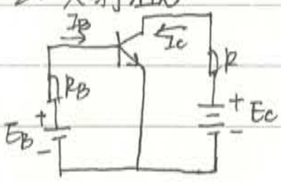
发射结	集电结	
正	反	放大区
正	正	饱和区
反	反	截止区

$V_{BE} > V_{on}$ { 放大区 $V_{CE} > V_{BE}$ $I_C = \beta I_B$; 饱和区 $V_{CE} < V_{BE}$ }

$V_{BE} < V_{on}$ 截止区 $V_{CE} > V_{BE}$

临界饱和 $V_{BE} = V_{CE}$ $I_C = \beta I_B$

2、共射组态



3. 晶体管的特性曲线

(1) 共射组态 大信号特性 $I_C = I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} = \beta I_B$

$I_E = I_C + I_B$

$I_C = \alpha I_E$

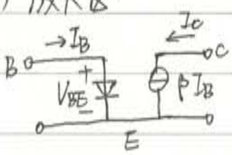
(2) 厄利电压

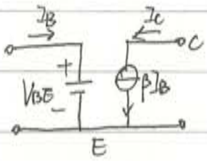
$I_C = I_C(0) + \Delta I_C = I_C(0) + I_C(0)\frac{V_{CE}}{V_A} = I_C(0)\left(1+\frac{V_{CE}}{V_A}\right)$ 给了V_A要算.

$I_B = \frac{I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}}{\beta}$ $I_C = I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}\left(1+\frac{V_{CE}}{V_A}\right)$

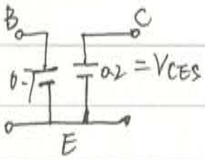
4. 大信号模型

(1) 放大区

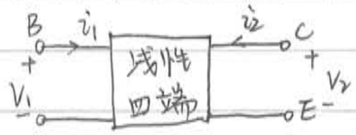




(2) 饱和区



5. h参数(小信号)等效电路.　前提：已知是放大区.



$$\begin{cases} V_1 = h_{11} i_1 + h_{12} V_2 \\ i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} V_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{BE} = h_{ie} i_b + h_{re} V_{CE} \\ i_c = \beta i_b + h_{oe} V_{CE} \end{cases}$$

① 令输入交流开路 ($i_1 = 0$)　info

得 $h_{12} = \frac{V_1}{V_2} = h_{re} = \frac{V_{BE}}{V_{CE}}$

$h_{22} = \frac{i_2}{V_2} = \frac{i_c}{V_{CE}} = h_{oe}$

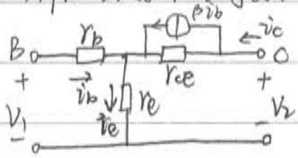
② 令输出交流开路

$h_{11} = \frac{V_1}{i_1} = h_{ie} = \frac{V_{BE}}{i_B}$

$h_{21} = \frac{i_2}{i_1} = h_{fe} = \frac{i_C}{i_B} = \beta$

6. T模型等效电路.

NPN 共射 T型等效



定义发射结的交流电阻 $r_e = \frac{\Delta V_{BE}}{\Delta I_E}$.

$r_e = \frac{V_T}{I_E} = \frac{26mV}{I_E}$.

$r_{ce} = \frac{\Delta V_{CE}}{\Delta I_C} \approx \frac{V_A}{I_{CQ}}$　→ 给了 V_A 一定算 r_{ce}

r_b → 基区材料的体电阻

$$\begin{cases} h_{ie} = r_b + (1+\beta) r_e \\ h_{re} \text{ 较小不考虑.} \\ h_{fe} = \beta \\ h_{oe} = \frac{1}{r_{ce}} \end{cases}$$

总结：双极结型与场效应晶体管的符号与工作区间

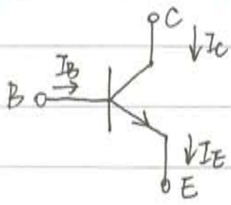
$I_E = I_B + I_C$

(放大) $I_C = I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} = \beta I_B$

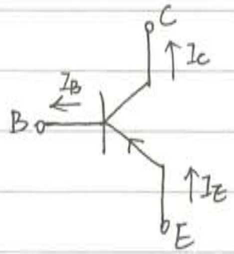
考虑基区宽度调制效

$I_C = I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}\left(1+\frac{V_{CE}}{V_A}\right)$

1. 双极结型（三极管）



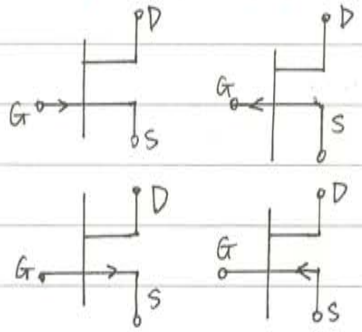
NPN



PNP

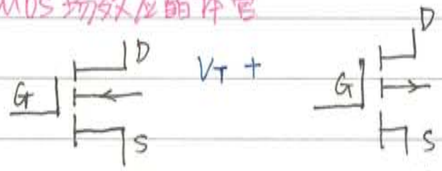
NPN：	放大区	截止区	饱和区	临界饱和
(PNP符号	$V_{BE}>V_{ON}$	$V_{BE}\le V_{ON}$	$V_{BE}>V_{ON}$	$I_C=\beta I_B$
全部相反)	$V_{CE}>V_{BE}$	$V_{CE}\ge V_{BE}$	$V_{CE}<V_{BE}$	$V_{CE}=V_{BE}$
	$I_C=\beta I_B$	$I_C=I_B=I_E=0$		

2. 结型场效应晶体管



N沟　　P沟

3. MOS场效应晶体管



V_T + 　　−

N沟增强　　P沟增强

−　　+

N沟耗尽　　P沟耗尽

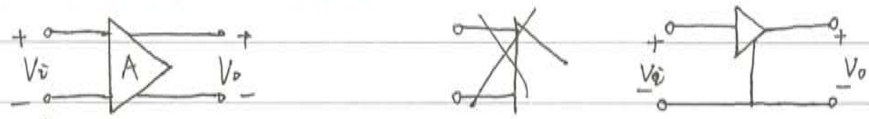
N沟：	恒流	截止 (夹断) $\to I_D=0$	电阻
	$V_{GS}>V_P$	$V_{GS}<V_P$	$V_{GS}\ge V_P$
	$V_{DS}>V_{GS}-V_P$	$V_{DS}>V_{GS}-V_P$	$V_{DS}<V_{GS}-V_P$
	$I_D=I_{DSS}\left(1-\frac{V_{GS}}{V_P}\right)^2(1+\lvert\lambda V_{DS}\rvert)$		

N沟：	饱和	截止	电阻
	$V_{GS}>V_T$	$V_{GS}<V_T$	$V_{GS}\ge V_T$
	$V_{DS}>V_{GS}-V_T$		$V_{DS}<V_{GS}-V_T$
$I_D=$	$\frac{k'W}{2L}(V_{GS}-V_T)^2(1+\lambda\lvert V_{DS}\rvert)$	0	$\frac{k'W}{L}\left[(V_{GS}-V_T)-\frac{V_{DS}}{2}\right]V_{DS}$

$I_{D饱}=\frac{1}{2}I_{D电阻}$

第五章 放大器的工作原理和分析方法

§1 基本概念 & 主要参数

1、


不失真的必要条件：A为线性网络.

2. 电压增益 $A_v=\frac{V_o}{V_i}$

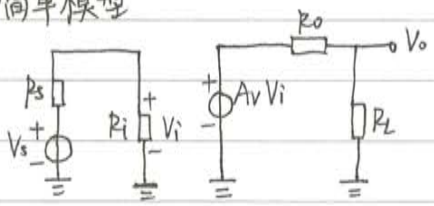
输入电阻 $R_i=\frac{V_i}{I_i}$ （从输入端看进去的电阻）

输出电阻 $R_o=\frac{V_o}{I_o}$

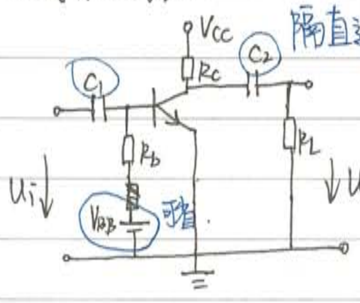
3. 分贝（dB）

$$A_v\,(dB)=20\log_{10}|A_v|$$

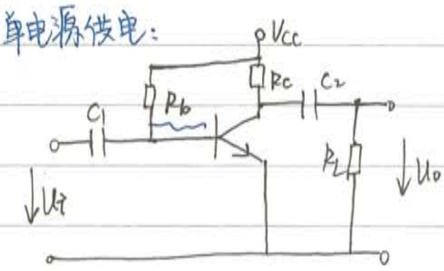
$$A_p\,(dB)=10\log_{10}|A_p|$$

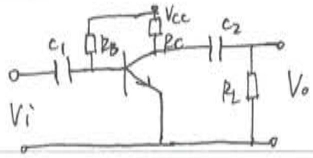
4. 简单模型


§2 放大器电路的组成和工作原理

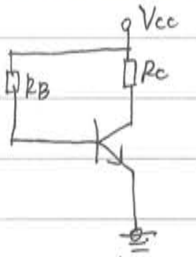
共射放大电路.


隔直通交 { 直流：断路
交流：短路.

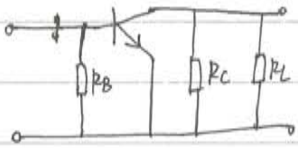
单电源供电：




§3.1 直流通路 和交流通路.



直流通路.(电容断路)



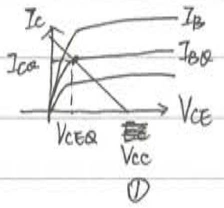
交流通路(电容短路.电压源为0).

§3.2 直流负载线

1. 直流负载线 $V_{CC} = I_C R_C + V_{CE}$

光有直流负载线 找不到"Q"点.

还要知道 I_{BQ}.



2. I_{BQ} 的求法

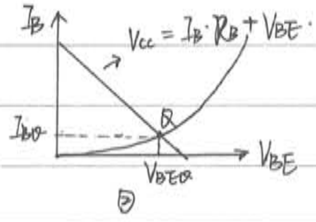
(1) 估算法.

假设已知 $V_{BE}=0.7V$. (硅0.7 锗0.2)

$V_{CC} = I_{BQ} \cdot R_B + V_{BE}$

(2) 图解法

前提:已知晶体管输入特性曲线



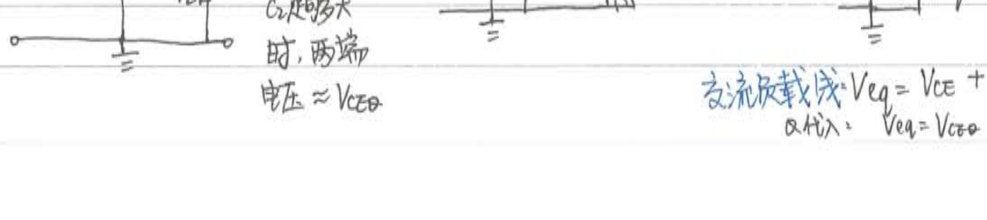
3. 将图②中的 I_{BQ} 代入图① 即可求得 Q点 $Q(I_{CQ}, V_{CEQ})$

$V_{eq} = \frac{V_{CC}-V_{CEQ}}{R_C+R_L} \cdot R_L + V_{CEQ}$

$R_{eq} = R_C // R_L$

§3.3 交流负载线

直+交 ⇒ 原电路.

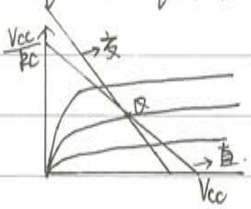


C_2足够大时,两端电压 $\approx V_{CEQ}$

交流负载线 $V_{eq} = V_{CE} + I_C \cdot R_{eq}$

Q代入: $V_{eq} = V_{CEQ} + I_{CQ} \cdot R_{eq}$

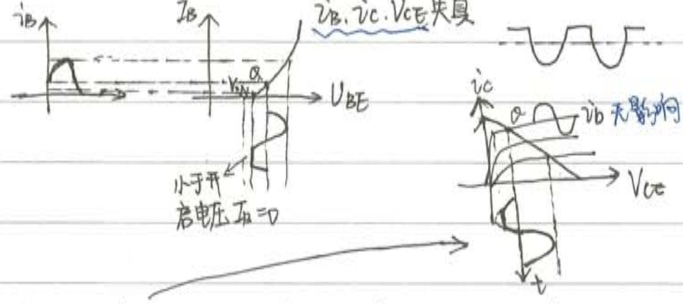
过 $V_{eq} = I_C \cdot R_{eq} + V_{CE}$ 和Q点的即为交流负载线

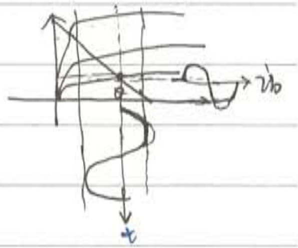


注：去掉 R_L（空载时），交流与直流负载线重合.

§3.4 非线性失真与Q的关系

1. 截止失真：Q点过低，引起 i_B, i_C, V_{CE} 失真　U_o 顶部失真（NPN管）.



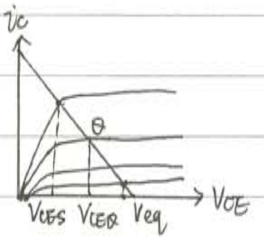


2. 饱和失真：Q点过高，引起 i_C, V_{CE} 失真.　U_o 底部失真.

3. 估算最大输出幅度.

① 直流负载线 → V_{CEQ}.

② 交流负载线 → V_{eq}



<1> 若 $V_{CEQ} > \frac{V_{eq}}{2}$（中点右侧）

则 $max = V_{eq} - V_{CEQ}$，否则截止失真　　使幅度最大：$V_{CEQ} = \frac{V_{eq} - V_{CES}}{2}$

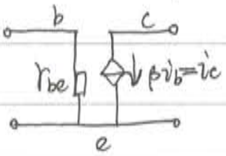
<2> 若 $V_{CEQ} < \frac{V_{eq}}{2}$（中点左侧）

$max = V_{CEQ} - \underbrace{V_{CES}}_{0.2V}$，否则饱和失真.

§4 微变等效电路.

（庵交流）

1、三极管微变等效电路.



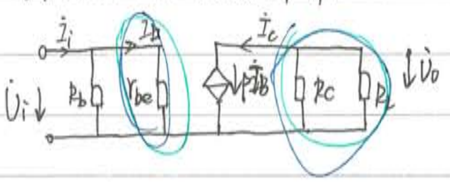
$r_{be} = r_{bb'} + (1+\beta)\frac{V_T}{I_{EQ}}$

$V_T \rightarrow 26mV$

$r_{bb'}$：体电阻，默认300Ω

I_{EQ}：β很大时 $\approx I_{CQ}$

2、电压放大倍数的计算.



$\dot{U}_i = \dot{I}_B r_{be}$

$\dot{U}_o = -\beta \dot{I}_B (R_C \| R_L)$

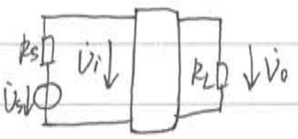
$A_V = -\beta \frac{(R_C \| R_L)}{r_{be}}$

3. 输入电阻

$R_i = \frac{\dot{U}_i}{\dot{I}_i} = R_b \| r_{be} \approx \underset{小}{r_{be}}$

信号源有内阻时

$A_{us} = \frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_s}$



$\because \dot{U}_i = \frac{R_i}{R_i+R_s} \dot{U}_s$

$\therefore A_{us} = \frac{R_i}{R_i+R_s} A_u$

4. 输出电阻 (去掉R_L)

$R_o = R_c$

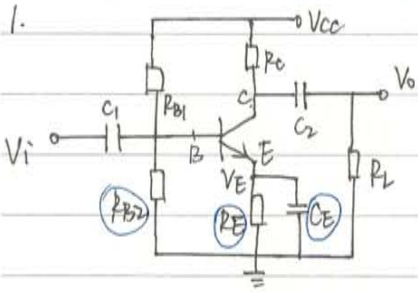
总结：

1. 估算法(直流) — 求Q.
2. 图解法 { 分析Q；最大不失真输出电压
3. h参数模型 — A_u. R_i. R_o

第六章 放大器的单元电路

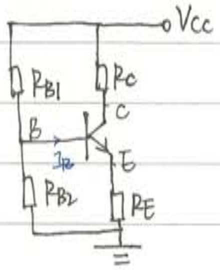
§3 工作点较稳定的偏置电路

1.



$I_C\uparrow \rightarrow I_E\uparrow \xrightarrow{V_B不变} V_E\uparrow \rightarrow V_{BE}\downarrow \rightarrow I_B\downarrow \rightarrow I_C\downarrow$

2、静态工作点的估算.



(将 R_{B1}、R_{B2} 看成串联 ∵ I_B 很小)

$$V_B = \frac{R_{B2}}{R_{B1}+R_{B2}} \cdot V_{CC}$$

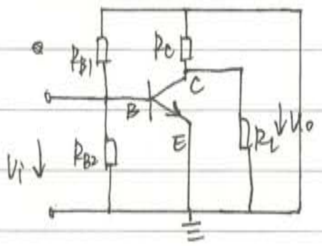
$$V_E = V_B - V_{BE}$$

$$I_E = \frac{V_E}{R_E} = \frac{V_B - V_{BE}}{R_E}$$

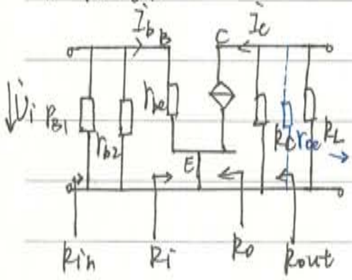
$$I_C \approx I_E$$

$$V_{CE} = V_{CC} - I_C R_C - I_E \cdot R_E$$

3. 交流



4. 微变.



→ 若不忽略厄利电压时 r_{ce} 的位置

$r_{ce} = \dfrac{V_A}{I_{CQ}}$

$$r_{be} = r_b + (1+\beta)\,r_e$$

$$= 300 + (1+\beta)\frac{V_T}{I_E}$$

$$R_{in} = r_{b1} \parallel r_{b2} \parallel r_{be}$$

$R_{out} = R_C$ (去掉 R_L)

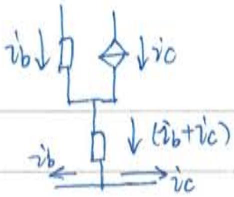
$$R_i = r_{be}$$

$$R_o = \infty$$

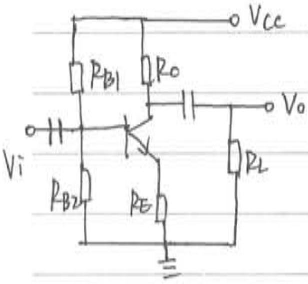
$$\dot{U}_i = \dot{I}_b \cdot r_{be}$$

$$\dot{U}_o = \dot{I}_c \cdot (R_C \parallel R_L)$$

$$A_u = \frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i} = -\beta\,\frac{R_C \parallel R_L}{r_{be}}$$

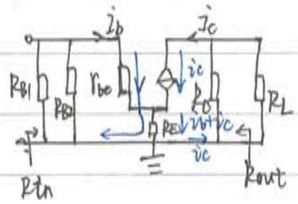


5. 有射极电阻 R_E 的共射放大电路



Q点不变

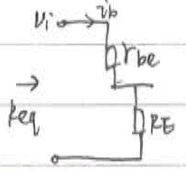
微变等效电路:



$\dot{U}_i = i_b r_{be} + (1+\beta) R_E i_b$

$\dot{U}_o = -\beta i_b (R_C \parallel R_L)$

~~Rin~~



$R_{eq} = \frac{U_i}{i_b}$

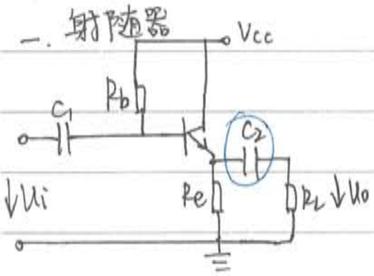
$= r_{be} + (1+\beta) R_E$

∴ $R_{in} = R_{B1} \parallel R_{B2} \parallel R_{eq}$

$R_{out} = R_C$ （⊖处断路）

6. 共集放大电路

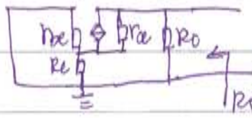
一、射随器



判断组态：输入 (B) 输出 (E)

∴ 共 C

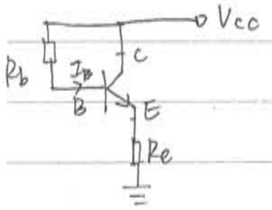
有 r_{ce} 时



P154

$R_{out} = R_C \parallel \left[r_{ce} \left(1 + \frac{\beta R_E}{R_E + r_{be}}\right)\right]$

二、直流通路及 Q 点



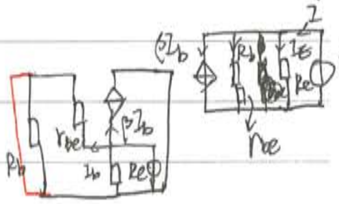
$V_{CC} = I_B R_b + V_{BE} + I_E R_e$

$= I_B R_b + U_{BE} + (1+\beta) I_B R_e$

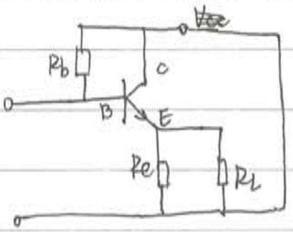
$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_b + (1+\beta) R_e}$

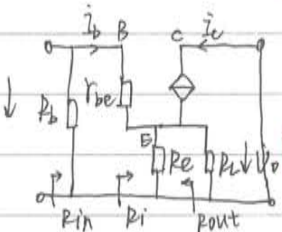
$I_C = \beta I_B$

$V_{CE} = V_{CC} - I_E R_E$



三、交流通路及微变等效电路





$R_{in} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_b} = r_{be} + (1+\beta)(R_e \parallel R_L)$

~~Rout = Re~~ $R_{in} = R_b \parallel R_i$

$\dot{I} = \dot{I}_E + (\beta+1)\dot{I}_b$

$= \frac{\dot{U}}{R_e} + (\beta+1)\frac{\dot{U}}{r_{be}}$

$R_{out} = \frac{1}{\frac{1}{R_e} + (\beta+1)\frac{1}{r_{be}}}$ = $R_e \parallel \frac{r_{be}}{\beta+1}$

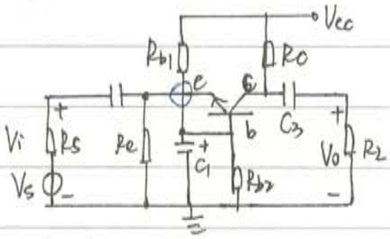
i_b 上有电流，与共射放大器不同

$\dot{U}_i = \dot{I}_b r_{be} + (\beta+1)\dot{I}_b (R_e \parallel R_L)$

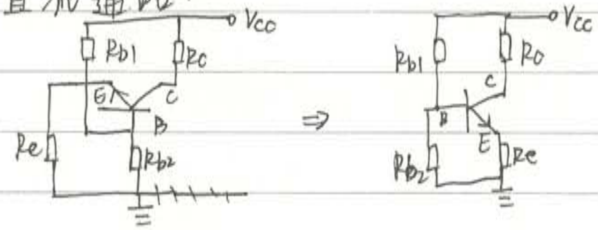
$\dot{U}_o = (1+\beta)\dot{I}_b (R_e \parallel R_L)$

$1 \approx A_u = \frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i} = \frac{(1+\beta)(R_e \parallel R_L)}{r_{be} + (1+\beta)(R_e \parallel R_L)}$

3. 共基放大器



1. 直流通路

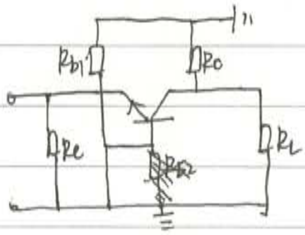


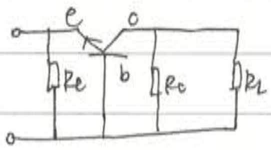
$$V_B = \frac{R_{b2}}{R_{B1}+R_{b2}} \cdot V_{CC}$$

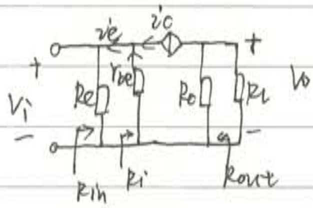
$$I_c = I_E = \frac{V_B - V_{BE}}{R_E}$$

$$V_{CE} = V_{CC} - I_c \cdot R_c - R_E \cdot I_E$$

2. 微变 & 交流







$$R_i = \frac{V_i}{-i_e} = \frac{-i_b R_{be}}{-(1+\beta) i_b} = \frac{r_{be}}{1+\beta}$$

$$R_{in} = R_i \,//\, R_e$$

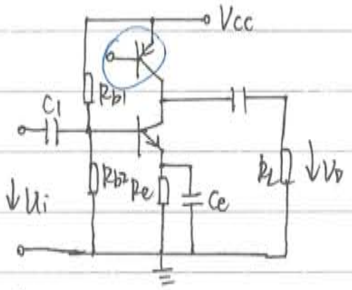
$$R_{out} = R_c$$

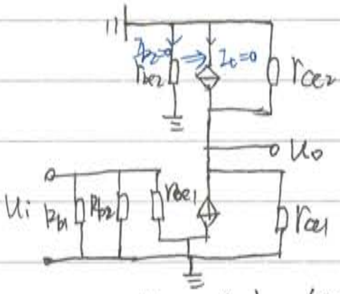
$$V_i = -i_b r_{be}$$

$$V_o = -\beta i_b \cdot (R_e \,//\, R_L)$$

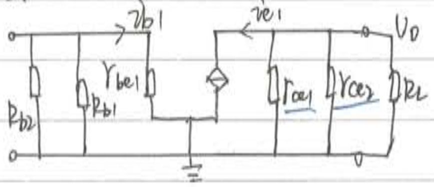
$$A_v = \frac{\beta (R_e \,//\, R_L)}{r_{be}}$$

§ 有源负载放大器 （了解. 能画微变. 能解释为啥有源负载更好）





微变.



$U_o = -\beta_1 i_{b1} \cdot (r_{ce1} \| r_{ce2})$

$U_i = i_{b1} \cdot r_{be1}$

$$A_v = \frac{-\beta_1 (r_{ce1} \| r_{ce2})}{r_{be1}}$$

$$A_{v普通} = \frac{-\beta\, R_c \| r_{ce1}}{r_{be}}$$

$\because r_{ce} \gg R_c$ （晶体管放大区 r_{ce} 很大）

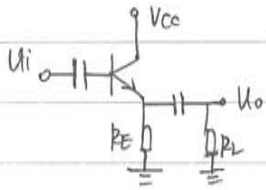
$\therefore A_v \gg A_{v普}$

§ 多级放大电路 （会计算放大倍数）

一. 计算方法 ：后级的输入阻抗是前级的负载

5. 功率输出级

一. 甲类功放

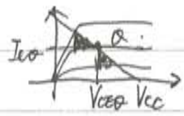


1. 静态功耗

电源提供的平均功率 $P_E = V_{CC} \cdot I_{CQ}$

三极管功耗 $P_T = V_{CEQ} \cdot I_{CQ}$.

2. 动态功耗

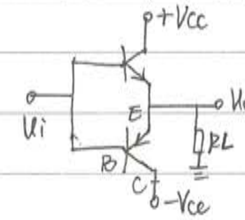


输出功率 $P_o = \frac{U_{om}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{om}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} U_{om} \cdot I_{om}$

$P_{om} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}V_{CC}) \cdot I_{CQ} = \frac{1}{4} V_{CC} \cdot I_{CQ}$

3. 效率: $\eta = \frac{P_{om}}{P_E} = \frac{\frac{1}{4}V_{CC} I_{CQ}}{V_{CC} \cdot I_{CQ}} = 0.25$

二. 乙类互补对称功放 (推挽输出)



1. 电压输出幅度 $(E_C - V_{CES}) \sim -(E_C - V_{CES})$

$V_{om} = V_{CC} - V_{CES}$

2. (忽略交越失真)

① $P_o = \frac{U_{om}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{om}}{\sqrt{2}} = \frac{U_{om}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{U_{om}}{\sqrt{2} \cdot R_L} = \frac{U_{om}^2}{2R_L}$

(平均) $P_{om} = \frac{V_{CC}^2}{2R_L}$

$|V_{CE1}| = |V_{CE2}|$

$\Delta V_{CE} = -\Delta V_o$

② $P_T = \frac{1}{R_L}\left(\frac{V_{CC} \cdot U_{om}}{\pi} - \frac{U_{om}^2}{4}\right)$ <一个管的>

③ $P_E = P_o + 2P_T = \frac{2V_{CC} \cdot U_{om}}{\pi R_L}$

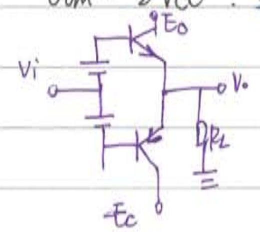
④ $\eta = \frac{P_o}{P_E} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{U_{om}}{V_{CC}}$

3. 最大管耗 $P_T = 0.2 P_{om}$

4. 最大管压降: $V_{CEM} = 2V_{CC} - V_{CES}$

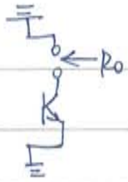
三. 甲乙类 $(E_C - V_{CES})$

$U_{om} = \frac{1}{2} V_{CC}$ $=E_C$. ~~基本~~公式与"乙类"同.

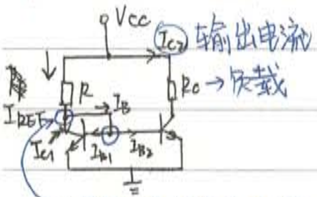


第八章 模拟集成电路中的单元电路

输出电阻



§电流镜：要求：会计算输出电流



之要针对这个点列方程

① $I_{REF} = \frac{V_{CC}-V_{CE}}{R} = \frac{V_{CC}-V_{BE}}{R}$

$\because V_{BE1} = V_{BE2}$

$\therefore I_{B1} = I_{B2}$, $I_{C1} = I_{C2}$

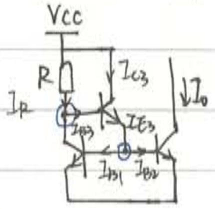
② $I_{REF} = I_B + I_{C1} = (I_{B1}+I_{B2}) + I_{C1} = (1+\frac{2}{\beta}) I_{C1}$

$\therefore I_{C2} = I_{C1} = I_{REF} / (1+\frac{2}{\beta}) \approx I_{REF}$

$R_o = r_{ce} = \frac{V_A}{I_{C2}} = \frac{V_A}{I_o}$

§电流失配 实际中 $I_{C2} \neq I_{REF}$

一. 原因一：基极电流 解决方法：增加晶体管减少 β 造成的电流失配



$I_o = I_{C2} = I_{C1} = I_R - I_{B3}$ ①

$I_{B3} = \frac{1}{1+\beta} I_{E3} = \frac{1}{1+\beta}(I_{B1}+I_{B2})$

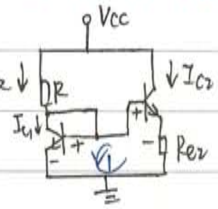
$= \frac{1}{1+\beta} \cdot (\frac{I_{C1}}{\beta} + \frac{I_{C2}}{\beta}) = \frac{2I_o}{\beta(1+\beta)}$ ②

由①②得：$I_o = I_R / [1+\frac{2}{\beta(1+\beta)}] \approx I_R / (1+\frac{2}{\beta^2})$

二. 原因2：基区调变效应

$\because I_C = I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} (1+\frac{V_{CE}}{V_A})$

§微电流源（widlar）



由回路1：$V_{BE1} = V_{BE2} + I_{E2} \cdot R_{e2}$

$\therefore I_{C2} \approx I_{E2} = \frac{V_{BE1}-V_{BE2}}{R_{e2}} = \frac{\Delta V_{BE}}{R_{e2}}$

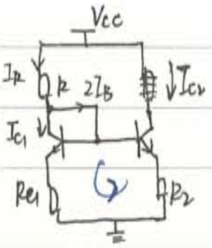
$\because \Delta V_{BE}$很小 故 I_{C2}很小

$\because I_C = I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}$ $I_{S1} = I_{S2}$

$\therefore V_{BE1} - V_{BE2} = V_T \ln \frac{I_{C1}}{I_{S1}} - V_T \ln \frac{I_{C2}}{I_{S2}} = I_{E2} R_{e2} = I_{C2} R_{e2}$

$\therefore I_{C2} R_{e2} = V_T \ln \frac{I_{C1}}{I_{C2}} = V_T \ln \frac{I_R}{I_{C2}}$

§比例电流源



$V_{BE1} + I_{E1} R_1 = V_{BE2} + I_{E2} R_2$

$V_{BE1} - V_{BE2} = I_{E2} R_2 - I_{E1} R_1$

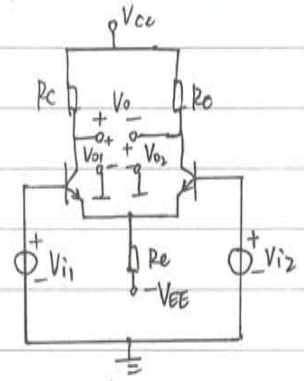
$V_T \ln \frac{I_{E1}}{I_{E2}} = I_{E2} R_2 - I_{E1} R_1$

$\because I_{C1} \approx I_{E1} \approx I_R$, $I_{C2} \approx I_{E2}$

$I_{C2} R_2 - I_{C1} R_1 = V_T \ln \frac{I_{C1}}{I_{C2}}$

$\therefore I_{C2} = I_R \cdot \frac{R_1}{R_2} + \frac{V_T}{R_2} \cdot \underbrace{\ln \frac{I_R}{I_{C2}}}_{\approx 0} = \frac{R_1}{R_2} \cdot I$

§ 差动放大电路



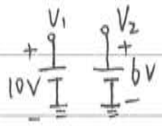
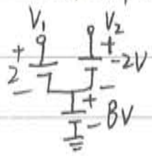
1、差模信号、共模信号

① 差模电压增益 $A_{vd} = \frac{V_{od}}{V_{id}}$ ， $\begin{cases} V_{od} = \pm \frac{V_{i1} - V_{i2}}{2} \\ V_{id} = V_{i1} - V_{i2} \end{cases}$

② 共模电压增益 $A_{vc} = \frac{V_{oc}}{V_{ic}}$ $\begin{cases} V_{oc} = \frac{V_{i1} + V_{i2}}{2} \\ V_{ic} = \frac{V_{i1} + V_{i2}}{2} \end{cases}$

定义: $\begin{cases} V_{id} = V_1 - V_2 \\ V_{ic} = \frac{V_1 + V_2}{2} \end{cases}$ (对于任意信号 V_1、V_2)

共模抑制比 $K_{CMRR} = \left| \frac{A_{VD}}{A_{VC}} \right| = CMRR$

eg.  $\Rightarrow$ 

2、基本工作原理

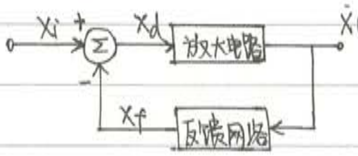
① 静态工作点

$V_{i1} = V_{i2} = \cancel{V_{CC} = V_{EE}} = 0$

$I_{Re} = \frac{-0.7 - (-V_{EE})}{R_e}$

第九章 负反馈

§负反馈放大电路的方框图



开环放大系数

$A = \frac{X_o}{X_d}$

(闭环) $A_F = \frac{X_o}{X_i}$

$X_d = X_i - X_f$

不管X_f的正负，都带负号.

反馈系数 $F = \frac{X_f}{X_o}$

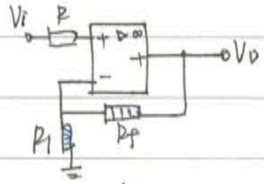
$\Rightarrow A_F = \frac{A}{1+AF}$

环增益 $T = AF$

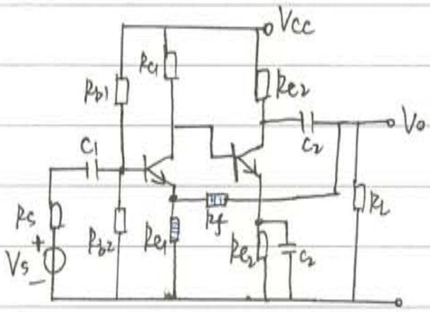
反馈深度：$1+AF$

§负反馈4种类型

一、电压串联负反馈



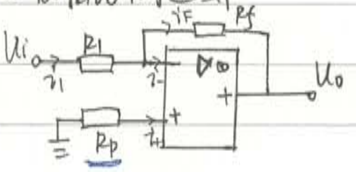
(1)



第十章 集成运放的应用

§比例运算电路

一、反相比例运算



$R_p = R_1 \parallel R_f$

虚短、虚地　　虚断

$\because u_- = u_+ = 0$，$i_+ = i_- = 0$

$\therefore i_1 = i_F$

$\therefore \frac{u_i}{R_1} = \frac{-u_o}{R_f}$

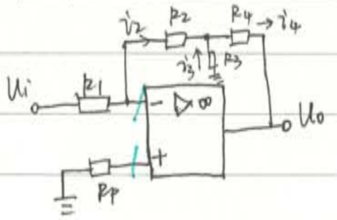
$A_u = \frac{u_o}{u_i} = \frac{-R_f}{R_1}$

$R_i = R_1$

特点：共模输入电压 $=0$

输入电阻小 $R_i = R_1$

采用T型反馈网络的反相比例电路.（目的：在高比例系数时，为避免 R_f 阻值太大）



$\because i_1 = i_2 = \frac{u_i}{R_1}$

又 $i_2R_2 = i_3R_3$

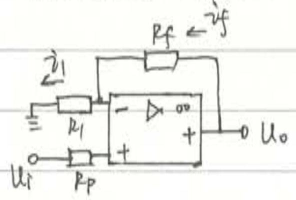
$\therefore i_3 = \frac{R_2}{R_3} \cdot i_2 = \frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{u_i}{R_1}$

$\therefore u_o = -i_2R_2 - i_4R_4 = -\frac{u_i}{R_1} \cdot R_2 - \left(\frac{u_i}{R_1} + \frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{u_i}{R_1}\right) R_4$

$\therefore A_v = \frac{u_o}{u_i} = \cdots$

二、同相比例运算放大器

特点：输入电阻大（∞）.



$u_- = u_+ = u_i$

$i_- = i_+ = 0$

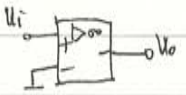
$\therefore i_1 = i_f$

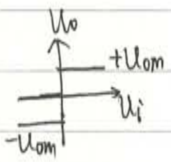
$\frac{u_o - u_i}{R_f} = \frac{u_i}{R_1}$

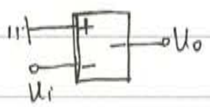
$\therefore A_v = 1 + \frac{R_f}{R_1}$

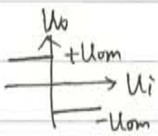
§比较器.

一、过零比较器

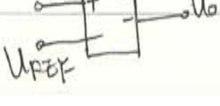




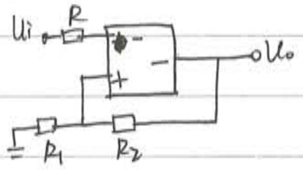




二、非零比较器

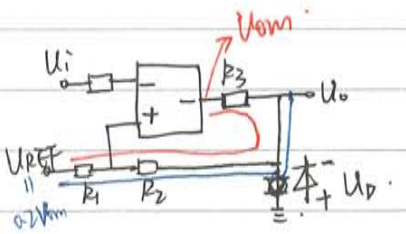


三. 迟滞比较器



门限电压 $U_{T+} = \frac{R_1}{R_1+R_2} U_{om}$

$U_{T-} = \frac{R_2}{R_1+R_2} U_{om}$



$\left(-U_D,\ \frac{R_1+R_2}{R_1+R_3+R_3}\left(U_{om} + U_{REF}\right)\right)$

$U_o \in \left(-U_D,\ \frac{R_1+R_2}{R_1+R_2+R_3}\left(U_{om} + U_{REF}\right)\right)$

~~$R_3 = R_2 = R_1$~~

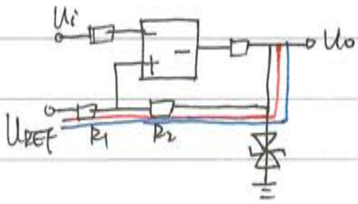
$R_3 = 2R_1 = 2R_2$

① 正饱和时

$U_{T+} = \frac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3} U_{REF} + \frac{R_1}{R_1+R_2+R_3} U_{om}$

② 负饱和

$U_{T-} = \frac{R_2}{R_1+R_2} U_{REF} - \frac{R_1}{R_1+R_2} \cdot U_D$



$U_o \in (-U_D, +U_D)$

① 正饱和

$U_{T+} = \frac{R_2}{R_1+R_2} U_{REF} + \frac{R_1}{R_1+R_2} U_D$

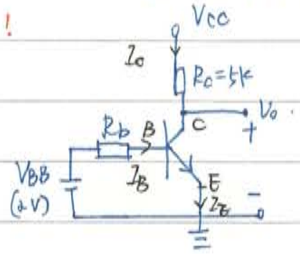
② 负饱和

$U_{T-} = \frac{R_2}{R_1+R_2} U_{REF} - \frac{R_1}{R_1+R_2} U_D$

例题

§第三章 晶体管

1. $V_{CC}=15V$. $\beta=100$, $V_{BE}=0.7V$. 求 (1) $R_b=50k\Omega$时, $V_o=?$ (2) 若T临界饱和, $R_b\approx ?$



解: (1) $V_{BB}=I_B\cdot R_b+V_{BE}$ 先判断工作在什么区!!!

$2=50k\cdot I_B+0.7$ 假设工作在放大区

$I_B=\frac{1.3}{50k}=26\mu A$ 由 $V_{CE}=2V>V_{BE}$

$I_C=\beta I_B=2.6mA$ $V_{BE}>V_{ON}$

$\because V_{CC}=I_C\cdot R_C+V_o$ ∴符合假设

$\therefore V_o=15-2.6\times10^{-3}\times5\times10^{3}=2(V)$

(2) 临界饱和 $\therefore V_{CE}=V_{BE}=0.7V$.

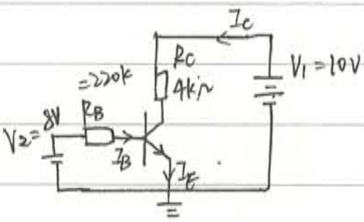
$\cancel{\therefore V_o=0.7V}$

$$I_C=\frac{V_{CC}-V_{CE}}{R_C}=\frac{14.3}{5k}=\cancel{28.6}\,2.86mA$$

$$I_B=\frac{1}{\beta}I_C=28.6\mu A$$

$$R_b=\frac{V_{BB}-V_{BE}}{I_B}=45.5k\Omega$$

2. $\beta=100$, 计算各电流值



解: $I_B=\frac{V_2-V_{BE}}{R_B}=\frac{8-0.7}{220k}$

$=33.2\mu A$

假设放大区

$\therefore I_C=\beta I_B=3.32mA$

$V_{CE}=V_1-I_C\cdot R_C=10-3.32\times10^{-3}\times4\times10^{3}=-2<V_{BE}$

∴不符合假设. 三极管工作在饱和区

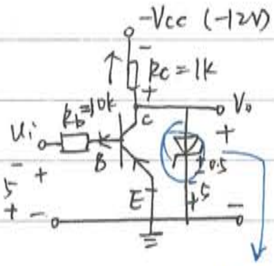
$\cancel{\therefore V_{CE}=V_{CC}=0.7V}$ $V_{CE}=V_{CES}$

$I_C=\frac{V_1-V_{CES}}{R_C}$ 临界饱和 $V_{CE}=V_{BE}$

$I_E=I_B+I_C$

3. $\beta=50$. $|V_{BE}|=0.2V$. 饱和管压降 $|V_{CES}|=0.1V$. $V_Z=5V$. $V_D=0.5V$. (1) 当 $V_i=0$ 时 $V_o=?$

(2) $V_i=-5V$ 时 $V_o=?$



解: ~~VBE~~ $V_{EB}=0.2V$, ~~VCE~~ $V_{ECS}=0.1V$.

(1) $V_i=0$ 时, $V_{EB}<V_{ON}$

截止区 稳压管反偏

$\therefore V_o=-V_Z=-5V$

(2) $V_i=-5V$.

$I_b=\frac{5-V_{EB}}{R_b}=\frac{4.8}{10k}=0.48\,mA$.

假设放大区

则 $I_c=\beta I_B=24\,mA$

$V_{EC}=-I_cR_c+V_{cc}=12-24=-12<V_{EB}$

$\therefore$ 不成立. 工作于饱和区.

$V_{EC}=0.1V$

$\therefore V_o=-0.1V$

二极管先让它断路. 看两端电压满足相应条件时则导通

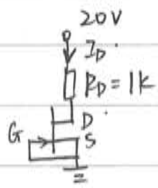
必注: ① 先判断(假设)工作区, 后套用公式

② 注意是 NPN 还是 PNP.

③ 临界饱和 与饱和的 V_{CE} 不同!!

结型场效应管

1. $V_P=-3V$. $I_{DSS}=10mA$. 判断在什么区?



解: $V_{GS}=0V>V_P$

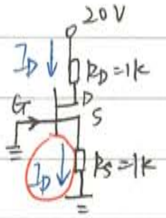
$\therefore$ 假设处于恒流区 → 恒流区模型

则 $I_D=I_{DSS}\left(1-\frac{V_{GS}}{V_P}\right)^2=10mA$

$\therefore V_{DS}=20-I_D\cdot R_D=10V>V_{GS}-V_P=3V$

$\therefore$ 假设成立.

2、N沟 $V_P=-2V$. $I_{DSS}=4mA$. 判断处在什么区？



解：~~$V_{GS}=0$~~ 假设恒流区

则 $I_D=I_{DSS}(1-\frac{V_{GS}}{V_P})^2$

$V_{GS}=0-V_S=-I_DR_S$

$\therefore I_D=I_{DSS}\cdot(1-\frac{I_DR_S}{2})^2$

$I_D=1$ or $4mA$ (舍)

$\therefore I_D=1mA$. $\quad\therefore V_{GS}=-1V>V_P=-2V$

~~$\therefore V_{DS}=20-10=10V>V_{GS}-V_P=1V$~~

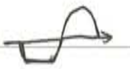
$\begin{cases} V_D=20-10=10V \\ V_S=I_DR_S=1V \end{cases}$

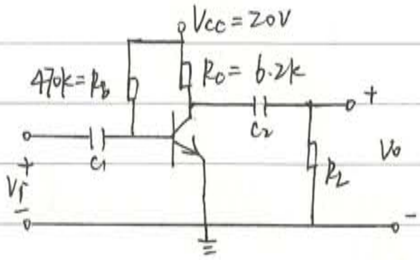
$\therefore V_{DS}=9V>V_{GS}-V_P=1V$

$\therefore$ 与假设一致.

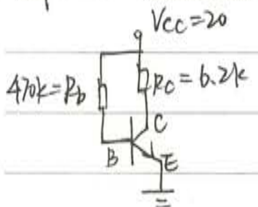
必注：注意看是N沟还是P沟.

第5章 放大器工作原理和分析方法

1. $\beta=43$, $V_{BE}=0.7V$ 求：(1) 静态工作点 (2) A_u、R_i、R_o. (3) 若波形  是什么失真？应调节哪个元件？如何调节？



解：(1) 直流通路



$V_{CC}=I_C\cdot R_C+V_{CE}$ ①

$V_{CC}=I_B\cdot R_b+V_{BE}$

$20-0.7=I_B\cdot 470k$

$I_{BQ}=41\mu A$.

$I_{CQ}=\beta I_{BQ}=1.76mA$.

$\therefore V_{CEQ}=20-1.76mA\times 6.2k$

$=9.1V$

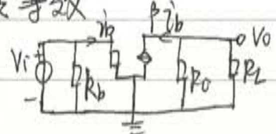
$R_i=R_b\,//\,r_{be}$

$R_o=R_C$

(3) 饱和失真.

应将 R_b 调大 减小 I_B

(2) 微变等效



$V_i=i_b\cdot r_{be}$

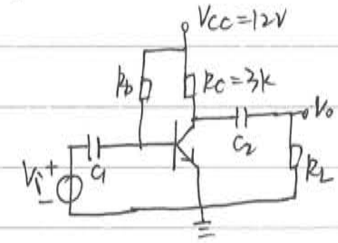
$V_o=-\beta i_b(R_C//R_L)$

$\therefore A_V=\frac{V_o}{V_i}=\frac{-\beta(R_C//R_L)}{r_{be}}$

$\frac{57}{2/11.0}$

V_{CES} V_{CEQ} V_{eq}

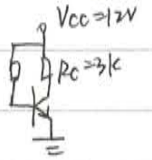
2. $V_{CES}=0.6V$. $I_{CQ}=2mA$. 求 $R_L=\infty$ 或 $R_L=3k\Omega$ 时，$V_{om}=?$



解：① $R_L=\infty$ 时

$\underline{V_{eq}=V_{CC}}$

直流通路



$V_{CC}=I_{CQ}\cdot R_C+V_{CEQ}$

$\therefore V_{CEQ}=12-2mA\times3k$

$=6V$

$V_{eq}-V_{CEQ}=\cancel{5.4}\ 6V$

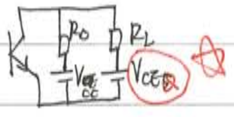
$V_{CEQ}-V_{CES}=5.4V$

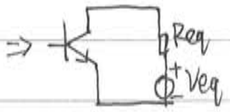
$\therefore V_{om}=5.4V$

② $R_L=3k\Omega$ 时

$V_{CEQ}=6V$

交流等效电路：





$V_{eq}=V_{CEQ}+\frac{R_L}{R_L+R_{OC}}\cdot(V_{CC}-V_{CEQ})$

$=\cancel{0.6}\ 6+\frac{3}{3+3}\cdot(12-\cancel{0.6}\ 6)$

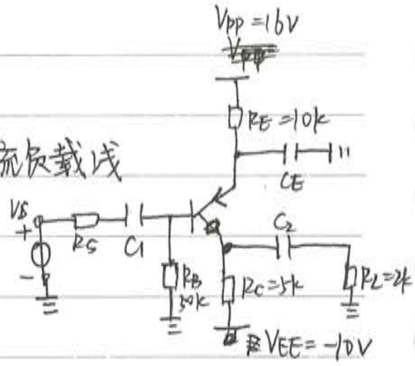
$=\cancel{6.3}\ 9V$

$V_{eq}-V_{CEQ}=9-6=3V$

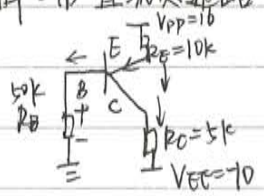
$V_{CEQ}-V_{CES}=5.4V$

$\therefore V_{om}=3V$

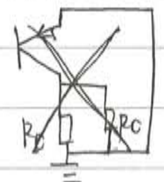
3. $V_{BE}=0.7V$. $\beta=150$. $V_A=\infty$. $r_{be}=4.36k$ 求Q点、交流负载线

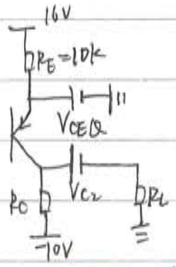


解：(1) 直流通路



(2) 交流通路.





$V_{PP}=I_E\cdot R_E+V_{EB}+I_B\cdot R_B$

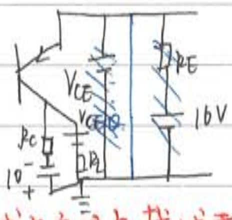
$16=151\cdot I_B\cdot10k-0.7+50k\cdot I_B$

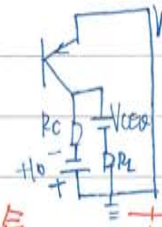
$\cancel{1560}\ 1560k\cdot I_B=16.7$

$I_B=$

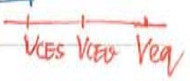
$V_{PP}-V_{EE}=I_E\cdot R_E+V_{EC}+I_C\cdot R_C$

$\cancel{I_C}\ V_{CE}=\cdots$





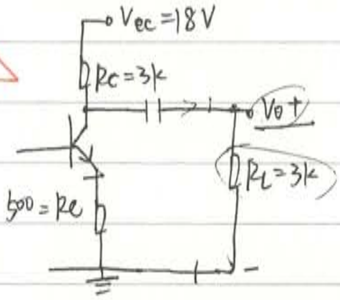
$V_{eq}=\frac{-10-V_{CEQ}}{R_C+R_L}\cdot R_L+V_{CEQ}$



必记：(1) 空载 ($R_L=\infty$) 时，$V_{eq}=V_{CC}$，直流负载线与交流负载线重合

(2) 交流负载线过Q点　　(3) 交流电路中是 V_{CEQ}!!

4. $V_{BEQ}=0.7V$. $V_{CES}=1V$. $\beta=50$. $I_{CQ}=2.\cancel{25}\,mA$. $V_{CEQ}=\cancel{5}\,6V$. 求 V_{om}.



解：$V_{eq}=I_{CQ}\cdot(R_C\|R_L+R_e)+V_{CEQ}$

$=2mA(1.5k+500)+6$

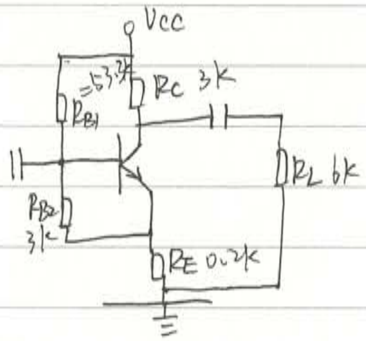
$=10V$

$V_{eq}-V_{CEQ}=4V$

$V_{CEQ}-V_{CES}=5V$

$\therefore V_{om}=\frac{R_C\|R_L}{R_C\|R_L+R_e}\cdot 4=3V$

5.

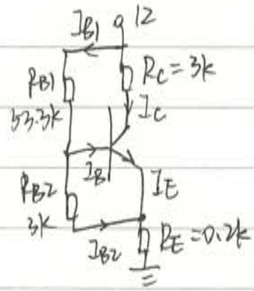


$\beta=100$，$r_b=0$，$V_A=\infty$，$V_{CC}=12$. $V_{BE}=0.6$

$V_{CES}=0$，$R_{B1}=53.3k$　$R_{B2}=3k$

(1) Q点　(2) 画直、交流负载线　(3) 求电压增益

(1) 直流通路



$I_{B2}=\frac{V_{BE}}{R_{B2}}=\frac{0.6}{3k}=0.2mA$

$12=I_{B1}R_{B1}+V_{BE}+[(\beta+1)I_B+I_{B2}]R_E$

$\begin{cases}53.3k\,I_{B1}+0.6+(101I_B+0.2mA)0.2k=12\\ I_B=I_{B1}-I_{B2}=I_{B1}-0.2mA\end{cases}$

$53.3kI_{B1}+(101I_{B1}-101\times0.2mA+0.2mA)0.2k=11.4$

$53.3kI_{B1}+20.2kI_{B1}-4.04+0.04=11.4$

$73.5kI_{B1}=15.4$

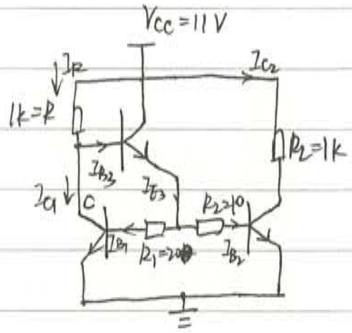
$I_{B1}=0.21mA$

$I_B=I_{B1}-0.2mA=0.01mA=10\mu A$

$I_C=100I_B=1mA$

第八章 电流源

1\. $\beta=20$，$V_{BE}=0.5V$，$V_A=\infty$，求 R_L 的电流



解：$I_{B1}\cdot R_1 + V_{BE1} = I_{B2}R_2 + V_{BE2}$

$$\underline{2I_{B1} = I_{B2}} \quad ①$$

$$I_{E3} = I_{B1} + I_{B2} = 3I_{B1} = 3\frac{I_{C1}}{\beta} = \cancel{\frac{3I_{C2}}{\beta}} \quad ②$$

$$I_{B3} + I_{C1} = I_R \quad ③$$

$$I_R\cdot 1k + V_{BE3} + I_{B1}R_1 + V_{BE2} = 11 \quad ④$$

$$I_R\cdot 1k = 10 - \frac{20I_{C1}}{\beta} \quad ⑤$$

$$\Rightarrow I_R = \frac{10-I_{C1}}{1k} \quad ⑤$$

⑤入③：
$$I_{B3} + I_{C1} = \frac{10-I_{C1}}{1k}$$

$$\frac{1}{1+\beta}I_{E3} + I_{C1} = \frac{10-I_{C1}}{1k}$$

$$\frac{1}{21}\cdot\frac{3I_{C1}}{\beta} + I_{C1} = \frac{10-I_{C1}}{1k}$$

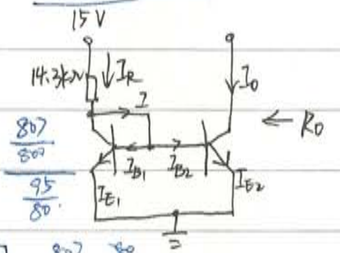
$$3I_{C1} + 4000I_{C1} = 40 - 4I_{C1}$$

$$4007I_{C1} = 40$$

$$I_{C1} \approx 0.01\,A$$

$$I_{C2} = 2I_{C1} = 0.02A$$

2\. β 很大，$V_A=80V$，$V_{BE}=0.7V$，$V_{CE2}=15V$，求输出电流 I_o 和输出电阻 r_o



(1) $15 = I_R\cdot 14.3k\Omega + V_{BE}$

$$\therefore I_R = \frac{14.3}{14.3k\Omega} = 1\,mA$$

$$I_R = I_{C1} + I_{B1} + I_{B2}$$

$$= \overset{0.849}{I_{C2}} + \frac{I_{C1}}{\beta} + \frac{I_{C2}}{\beta}$$

$$= I_{C2}\,0.849$$

$$\therefore I_{C2} = \frac{I_R}{0.849} = \frac{1}{0.849} = 1.18\,mA$$

$$\frac{I_{C1}}{I_{C2}} = \frac{1+\frac{V_{CE1}}{V_A}}{1+\frac{V_{CE2}}{V_A}} = \frac{1+\frac{0.7}{80}}{1+\frac{15}{80}} = \frac{\frac{807}{800}}{\frac{95}{80}}$$

$$= \frac{807}{800}\times\frac{80}{95} = 0.849$$

~~∵ 存在基区调变效应~~

$$\cancel{\therefore I_{C2}' = I_{C2}\left(1+\frac{V_{CE}}{V_A}\right)}$$

$$\cancel{= 1mA\left(1+\frac{15}{80}\right)}$$

$$= 1.19mA$$

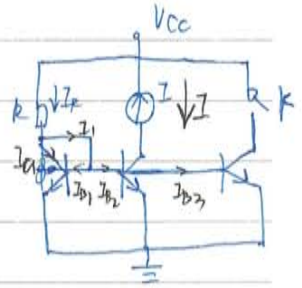
$$I_c = I_s e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}\left(1+\frac{V_{CE}}{V_A}\right)$$

(2) $\boxed{r_o = r_{ce}}$

$$= \frac{V_A}{I_{CQ}} = \frac{80}{1.19mA}$$

$$= 67.2\,k\Omega$$

3. $\beta=50$. $V_A=\infty$. (1) K闭合时，$I=?$ (2) K断开时，电流I是否变化？为什么？



解：(1) $I_R = I_{C1} + I_{B1} + I_{B2} + I_{B3}$

$= I + \frac{3I}{\beta}$

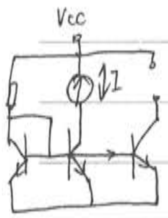
$= \frac{53}{50} I$

$V_{CC} = I_R \cdot R + V_{BE}$

$I_R = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R}$

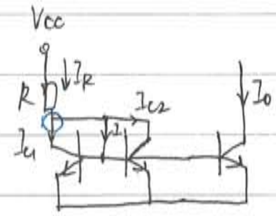
$\therefore I = \frac{50}{53} \cdot \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R}$

(2) K断开



$I_{B3} \uparrow$ $I \downarrow$

4. $\beta=\infty$ 与 $\beta=50$ 2种情况下求 $\frac{I_0}{I_R}$



解：$I_R = I_{C1} + I_{C2} + I_{B1} + I_{B2} + I_{B3}$

$= I_0 + I_0 + \frac{3I_0}{\beta}$

$= \frac{(2\beta+3)I_0}{\beta}$

① $\beta=\infty$

$\frac{I_0}{I_R} = \frac{\beta}{2\beta+3} = \frac{1}{2}$

② $\beta=50$

$\frac{I_0}{I_R} = \frac{50}{103}$

1. $r_d = \frac{V_T}{I_{DQ}}$

二极管交流电阻　　直流电流

2. ~~FET 的叫"夹断区"不是"截止区"~~

3. 反馈系数：电压并联 $F=\frac{i_F}{V_o}$　　电流并联 $F=\frac{i_F}{i_o}$

电压串联 $F=\frac{V_F}{V_o}$　　电流串联 $F=\frac{V_F}{i_o}$

4. 电流镜的题，若不忽略 V_A，则 $\frac{I_{C1}}{I_{C2}} = \frac{1+\frac{V_{CE1}}{V_A}}{1+\frac{V_{CE2}}{V_A}}$

5. 乙类 (甲乙类)　$P_o = \frac{V_o^2}{2R_L}$ → 实际值 非有效值 $V_{om} = V_{CC}-V_{CES}$　$P_{om}=$

$P_T = \frac{1}{R_L}\left(\frac{V_o V_{CC}}{\pi} - \frac{V_o^2}{4}\right)$

$P_E = P_o + 2P_T$

$V_{om}=V_{CC}-V_{CES}$

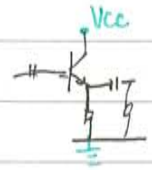
最大管耗 $P_{TM}=0.2P_{om}$

最大管压降 $V_{CEM}=2V_{CC}-V_{CES}$

甲类：$P_o=\frac{1}{2}V_o\cdot I_o$

$P_T = V_{CEQ}\cdot I_{CQ}$

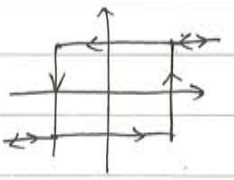
单电源 $V_{om}=\frac{1}{2}V_{CC}$　$I_{om}=I_{CQ}$



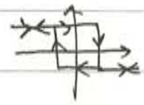
6. 最大不失真幅度：令 $V_{CEQ}=\frac{V_{CC}-V_{CES}}{2}$

迟滞比较器：

7. Vi由同相端引入



Vi由反相端引入



8. 判断工作区时，结型的P沟用"≫""<"与N相反判断

其他的可用将字母颠倒的办法

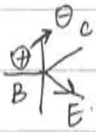
9.

三极管	放大	饱和	截止
JFET	恒流(夹断)	可变电阻	截止
MOS FET	饱和	电阻	截止

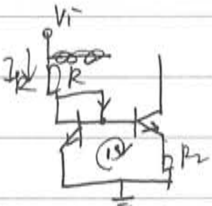
10. JFET. N沟  $V_p<0$. P沟  $V_p>0$

11、当开环增益有限时，不能用虚短.

$$V_+-V_-=\frac{V_0}{A}$$

12.  B.C间极性相反.

13. 交流特性：输入、输出阻抗、电压增益.

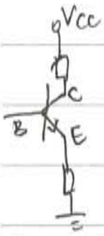
14、电流镜 

在回路1用基尔霍夫电压定律：$V_{BE_1}=V_{BE2}+I_{E2}R_2$

利用公式 $I_c=I_se^{\frac{V_{BE}}{V_T}}$

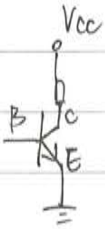
及 $\begin{cases} I_{C1}\approx I_R \\ I_0\approx I_{E2} \end{cases}$

15、有射极电阻的 Q点稳定过程

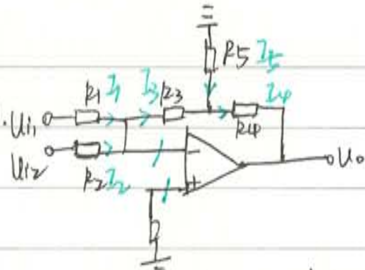


$\underbrace{T\uparrow\rightarrow I_C\uparrow}\rightarrow I_E\uparrow\rightarrow V_E\uparrow\rightarrow\underbrace{V_{BE}\downarrow}\rightarrow I_B\downarrow\rightarrow I_C\downarrow$

无射极电阻

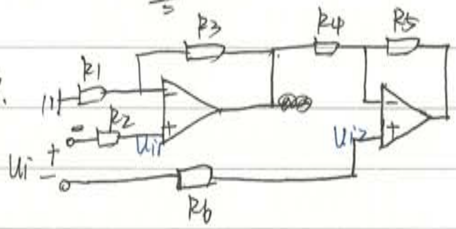


$\underbrace{T\uparrow\rightarrow I_C\uparrow}\rightarrow R_C$压降$\uparrow\rightarrow V_C\downarrow\rightarrow\underbrace{V_{BE}\downarrow}\rightarrow I_B\downarrow\rightarrow I_C\downarrow$

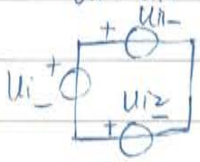
16. 

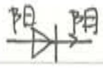
$I_1 + I_2 = I_3$

切忌因为虚短就认为 $I_1+I_2=I_3+I_5$

17. 

$u_i = u_{i1} - u_{i2}$





2.3 二极管模型

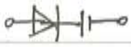
一、大信号模型

$I = I_s(e^{V/nV_T}-1)$

I_s: 反向饱和电流

n: 与工艺有关的常数. 本课程取 $n=1$

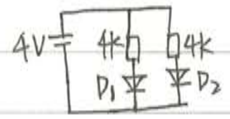
1. 理想模型 

2. 恒压降模型 

3. 折线模型.

练习　　必分析要点: 二极管的工作状态 $\begin{cases}\text{on}\\ \text{OFF}\end{cases}$

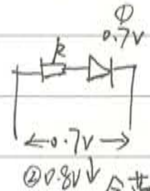
不考虑电阻. 只考虑阴阳极连的电压 电源

1. 

已知: $V_1=0.7V$　$V_2=0.3V$　求通过 D_1、D_2 的电流

$I_{D_1} = \frac{4-0.7}{4K} =$

$I_{D_2} = \frac{4-0.3}{4K} =$



优先于R

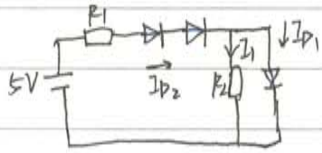
会落在二极管上

① $I_R = \frac{0.7-0.7}{R} = 0\,A$

② $I_R = \frac{0.8-0.7}{R}$

一开启两端电压即固定.

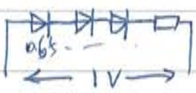
用 $I=I_s(e^{V/V_T}-1)$算 误差大!!!

2. 

$R_2=1K$.　$V_r=0.65V$

求R_1使 $2I_{D_1} = I_{D_2}$

$5 > 3\times0.65 \Rightarrow$ 三个二极管都导通.

若 

无法处理

$I_1 = \frac{0.65}{R_2} = \frac{0.65}{1K}$

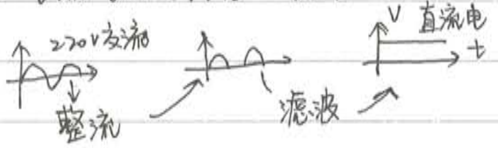
$I_{D_2} = \frac{5-0.65\times3}{R_1}$

$\begin{cases} I_{D_1} = I_{D_2} - I_1 \\ I_{D_2} = 2I_{D_1} \end{cases}$

3-5.7.9.13.18 21题.

直流(广义)→相位.  也是.

2.4.2 整流电路(理想二极管).



定性分析→理想模型.
定量分析→恒压降.
AM 调幅
FM 调频.

2.4.3 检波电路

$V_{BE} > V_{ON}$ $\begin{cases} 放大 \\ 饱和 \quad V_{CE} < V_{BE}. \end{cases}$

$V_{BE} < V_{ON}$ 截止

☆ H模型. 前提:已经判断出是在放大区.

☆ 给 V_A 一定算 r_{CE}.

T与H的关系. 计算公式(厄利电压)

T模型

$V_T = 26mV\ (300K)$. $r_e = V_T / I_E$

↓

补偿

$r_{ce} = \frac{\Delta V_{CE}}{\Delta I_C} \approx \frac{V_A}{I_{CQ}}$.

P75

~~还好~~

!!! [illegible] !!

模拟电路

· 非线性

· 二极管

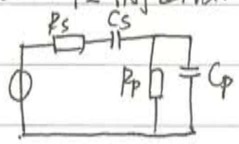
· 三极管　　　　　　　　　　　　近似？

处理方法：先线性等效，再写方程组.

12X　　multisim

重点：三极管放大电路、反馈、集成运放电路

1.1.3 传输函数.



$$H(j\omega) = \frac{R_p}{R_s+R_p} \cdot \left[\frac{1}{1+\left(\frac{R_p}{R_p+R_s}\right)\left(\frac{C_p}{C_s}\right)+\frac{1}{j\omega\tau_s}+j\omega\tau_p} \right].$$

$\tau_s = (R_s+R_p)C_s$

$\tau_p = (R_s \parallel R_p)C_p$

当 $C_s \gg C_p$ · 可分别计算

高频　$\cancel{Z_{cs} = \frac{1}{j\omega C_s}}$　$\cancel{Z_{cp} = \frac{1}{j\omega C_p} \to 0}$.　$Z_{cs} = 0$　只计算 C_p

（ω 大，C_p 大.）

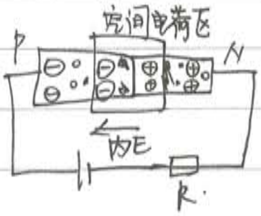
低频.　　$Z_{cp} \to \infty$　只计算 C

2. PN 结的单向导电性

(1) 加正向电压（正偏）—— 电源正极接P区，负极接N区。

外电场方向与内电场方向相反。

外E削弱内E → 耗尽层变窄 → 扩散运动 > 漂移 → 多子扩散形成正向电流 I_D。



(2) 加反向电压

外E加强内E → 宽 → 漂移 > 扩散 → 少子漂移形成反向 I_R。

在一定温度下，由本征激发产生的少子浓度一定，故 I_R 与外加电压无关。(与温度有很大关系)

一、PN结方程（理想）

$I = I_s(e^{\frac{V}{V_T}} - 1)$

I_s：反向饱和电流大小

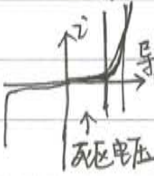
$V_T = \frac{kT}{q}$ 热电势

k 为玻尔兹曼常数 1.38×10^{-23}

q 电子电荷量 1.6×10^{-19}

T 热力学温度

二、实际二极管



导通压降：硅 0.7V 锗：0.3V

死区电压：硅：0.5V 锗：0.1V

NO. DATE.

计算机与控制工程学院

信息安全 专业

王钰 (1310670)

NO.　　DATE.

第一章 随机变量及其概率

1、包含 $A\subset B$. A发生必有B发生

2、相等 $A=B \Leftrightarrow A\subset B$ 且 $B\subset A$

3、并(和) $A\cup B$ 或 $A+B$. $A\cup B$发生 $\Leftrightarrow$ A、B中至少有一个发生

4、积 $A\cap B$ $A\cap B$发生 $\Leftrightarrow$ A,B都发生

5、差 $A-B$ A发生、B不发生

6、互斥 $AB=\Phi$ A,B不可能同时发生

→ 互斥即一个发生必导致另一个不发生. 故AB互斥则AB不相互独立. 相互独立也不可能互斥

↑ 特殊情况

7、对立 $AB=\Phi$ $A=\bar{B}$ 每次试验A,B中有且只有一个发生

8. 完备事件组. A_1、A_2、…、A_n 22互斥且 $\Omega=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$

运算律

1、差化积 $A-B=A\bar{B}=A-AB$

2、分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$A\cup(BC)=(A\cup B)(\cancel{A}A\cup C)$

3、反演律 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}$ $\overline{AB}=\cancel{\bar{A}\bar{B}}\ \bar{A}\cup\bar{B}$

顺序: 逆 交并差、括号优先

$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$

eg. 化简 $\overline{(\overline{AB}\cup C)\,\overline{AC}}$

$=\overline{(\overline{AB}\cup C)}\ \overset{\cup}{\cancel{A}}AC$

$=(\overline{\overline{AB}}\cap\bar{C})\cup AC$

$=[(A\cup B)\cap\bar{C}]\cup AC$

$=(A\bar{C}\cup B\bar{C})\cup AC$

$=(A\bar{C}\cup AC)\cup B\bar{C}$

$=A\cup B\bar{C}$

$P(ABC)=P(C|AB)\,P(B|A)\,P(A)$.

eg2. ABC都不发生 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}=\overline{A\cup B\cup C}$

ABC不都发生 $\overline{ABC}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$

$P(B-A)$
$=P(B)-P(AB)$

§概率的定义及计算

一、

1. $P(\bar{A}) = 1-P(A)$
2. $\begin{cases} A\subset B \Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A) \\ \text{任意}A,B \Rightarrow \underline{P(B-A)=P(B)-P(AB)} \end{cases}$
3. 加法公式：$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(AB)$

推广：$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C) - P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

$P(A+B+C)$
$=P(A)+P(B)+P(C)$
$-P(AB)-P(BC)$
$-P(AC)+P(ABC)$

eg. $P(A)=0.6$ $P(B)=0.7$ 何条件下，$P(AB)$ 取 max/min？

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(AB)$

$\Rightarrow P(AB) = P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

当 $P(A\cup B)=1$ 时

$P(AB)_{min} = 0.3$

又 $\begin{cases} P(AB)\le P(A) = 0.6 \\ P(AB)\le P(B) = 0.7 \end{cases}$

$\therefore P(AB)_{max} = 0.6$

$P(AB)\le P(A)$.
$P(AB)\le P(B)$.

注：$P(A\cup B)=1 \not\Rightarrow A\cup B=\Omega$

$A\cup B=\Omega \Rightarrow P(A\cup B)=1$

二、古典概型

$\begin{cases} \text{事件个数有限} \\ \text{等可能性发生} \end{cases}$

eg1. 摸球 a白 b红，取m个恰有k个白的概率

<1> 放回 二项分布

$P(k\text{个白}) = C_m^k\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\left(\frac{b}{a+b}\right)^{m-k}$

<2> 不放回 超几何分布

$P(k\text{个白}) = \frac{C_a^k C_b^{m-k}}{C_{a+b}^m}$

eg2. (分房模型) 有k个不同球，每个球等可能落入N个盒子

(1) 指定的k个盒子中各有一球 $\frac{k!}{N^k}$ $\quad \frac{k}{N}\cdot\frac{k-1}{N}\frac{k-2}{N}\cdots\frac{1}{N}$

(2) 指定的一个盒子恰有m球 $\frac{C_k^m(N-1)^{k-m}}{N^k}$ $\quad C_k^m\frac{1}{N^m}\cdot\frac{(N-1)^{k-m}}{(N)^{k-m}}$ $\quad \frac{N-1}{N}\ \frac{N-1}{N}$ k-m个

(3) 某指定盒中没有球 $\frac{(N-1)^k}{N^k}$

(4) 恰有k个盒子中各有一球 $\frac{C_N^k \cdot k!}{N^k}$

(5) 至少有2个球在同一盒子中 $1-\frac{C_N^k \cdot k!}{N^k}$

(6) 每个盒子至多有一个球 $\frac{C_N^k \cdot k!}{N^k}$

$$\frac{N-1}{N}\cdot\frac{N-1}{N}\cdots\frac{N-1}{N}$$

$$C_N^k \cdot \underbrace{\frac{k}{N}\cdot\frac{k-1}{N}\cdots\frac{1}{N}}_{k}$$

5.条件概率

1.定义: $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

2.性质: (1) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A)$

(2) $P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$

(3) $P(B|A)=1-P(\bar{B}|A)$

(4) $P(B_1-B_2|A)=P(B_1|A)-P(B_1B_2|A)$

带条件不影响运算性质.

3.乘法公式: $P(AB)=P(A)P(B|A)$ $(P(A)>0)$

推广: $P(A_1A_2A_3\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$

eg1. 20张钞票中有5张假钞，从20张中抽2张，其中一张是假钞，求2张都是假钞的概率

解: P(2张都假钞|其中一张假) $=\frac{C_5^2}{C_5^1\cdot C_{15}^1+C_5^2}=\frac{10}{85}$

$\frac{C_2^2}{C_5^1\cdot C_{15}^1}$

$\frac{C_5^2}{C_5^1\cdot C_{19}^1}=\frac{\frac{5\times4}{2}}{5\times19}=\frac{2}{19}$

eg2. 5个产品3个一等2个二等，不放回抽取，求: (1) 连取三次，第三次才取得一等品的概率 (2) 取2次，已知第二次取得一等品，求第一次取得二等品的概率

解: (1) $P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=$

$=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)$

$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}$

(2) $P(\bar{A}_1|A_2)=\frac{P(\bar{A}_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{10}+\frac{3}{10}}=\frac{1}{2}$

乘法公式 $P(AB) = P(A|B)P(B)$.

$= P(B|A)P(A)$

$P(ABC) = P(C|AB)P(B|A)P(A)$.

全概率公式 $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$

$B_1 + \cdots + B_n = S$

贝叶斯公式 $P(B_i|A) = \dfrac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$

常用： $P(A) = P(A|B)\overset{P(B)}{} + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$.

$P(B|A) = \dfrac{P(BA)}{P(A)} = \dfrac{P(A|B)P(B)}{P(A|\bar{B})P(\bar{B}) + P(A|B)P(B)}$

第二章 随机变量及其分布

§2. 离散型随机变量及其分布律

(一) (0-1)分布

分布律

X	0	1
p_k	$1-p$	p

(二) 伯努利试验、二项分布

1. 伯努利试验：试验只有2个可能结果：A与$\bar{A}$
2. 二项分布：n重伯努利试验

X服从参数n,p的二项分布：$X\sim B(n,p)$

→ 泊松定理

(三) 泊松分布

$n\geq 20$，$p\leq 0.05$时可用泊松分布代替二项分布计算. $\lambda = np$

设随机变量X可能取的值为0, 1, 2...

若 $P\{X=k\} = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $(\lambda>0)$.

称X服从参数为λ的泊松分布：$X\sim\pi(\lambda)$

§3. 随机变量的分布函数

1. 定义：设X是一个随机变量，x是任意实数，函数 $F(x)=P\{X\leq x\}$，$-\infty<x<\infty$

称X的分布函数

$$P\{x_1<X\leq x_2\} = P\{X\leq x_2\} - P\{X\leq x_1\}$$
$$= F(x_2)-F(x_1)$$

2. 分布函数的性质

(1) $F(x)$是不减函数

(2) $0\leq F(x)\leq 1$

(3) $\begin{cases} F(-\infty)=0 \\ F(+\infty)=1 \end{cases}$

以后提到随机变量X的"概率分布"

$\begin{cases} \text{离散型：分布律} \\ \text{非～：概率密度} \end{cases}$

(X是连续型随机变量时)

§4. 连续型随机变量及其概率密度

1. 定义：若对$F(x)$，存在非负可积$f(x)$使 $F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$

则X为连续型随机变量，$f(x)$为X的概率密度函数.

2、性质

(1) $f(x) \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

(3) $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

(4) 若 ~~f(x)~~ $f(x)$ 在 x 处连续，则 $F'(x) = f(x)$

特别的，当 X 取任一指定值时 $P\{X=a\}=0$ $\Rightarrow$ 若 A是不可能事件 $\Rightarrow P(A)=0$

$P(A)=0$ $\not\Rightarrow$ A是不可能事件

3. 三种重要的连续型随机变量.

(一) 均匀分布 $X \sim U(a,b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(二) 指数分布

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

"无记忆性"

(三) 正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

(1) 曲线关于 $x=\mu$ 对称
当 $x=\mu$ 时取 max $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

(2) 当 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时，X 服从标准正态分布.

概率密度 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ 其中 $t = \frac{x-\mu}{\sigma} = x$

分布函数 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ 另，$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ $P(|x| \leq a) = 2\Phi(a) - 1$

(3) 引理：若 $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$\therefore$ 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow F(x) = P\{X \leq x\} = P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\} = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{\frac{x_1-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x_2-\mu}{\sigma}\}$

$= \Phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma})$

§ 随机变量的函数的分布

已知 X 的密度函数（概率分布）$f_X(x)$，求 $Y=g(X)$ 的概率分布 $f_Y(y)$

1. $g(x)$ 不单调（通法）

① 根据 $Y=g(x)$ 判断 Y 的范围

② $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$
$$=P\{X\le h(y)\}$$
$$=F_X(h(y))$$

$\therefore f_Y(y)=F'_Y(y)=F'_X(h(y))\cdot h'(y)$ → 关于y的导数.
$$=f_X(h(y))\cdot h'(y)$$

2. $g(x)$ 单调

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & 其他 \end{cases}$$
→ 根据 X 的范围

第三章 多维随机变量及其分布

注：$P(X>a, Y>c) \neq 1-F(a,c)$

$P(X>a, Y>c) = P(a<X<+\infty, c<Y<+\infty)$

$(a,+\infty) \quad (+\infty,+\infty)$

$= F(+\infty,+\infty) - F(+\infty,c) + F(a,c) - F(a,+\infty)$

$(+\infty,c)$

§1 二维随机变量

1. 定义：$F(x,y) = P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\} = P\{X\le x, Y\le y\}$ (a,c)

(x,y) 的（联合）分布函数

☆2. $P\{x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2\} = F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) - F(x_1,y_2) \ge 0$

利用此性质可判断 $F(x,y)$ 能否成为二维 r.v. 的分布函数.

3. 性质：(1) $F(x,y)$ 不减

(2) $F(-\infty,-\infty)=0$

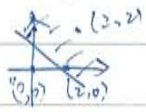
$F(+\infty,+\infty)=1$ $\Rightarrow$ $F(+\infty,-\infty)=0$, $F(-\infty,+\infty)=0$

$F(-\infty,y)=0$ $\quad F_X(x)=P\{X\le x\} = F(x,+\infty)$

$F(x,-\infty)=0$ $\quad F_Y(y)=P\{Y\le y\} = F(+\infty,y)$

eg. $F(x,y)=\begin{cases}0, & x+y\le 1\\ 1, & x+y\ge 1\end{cases}$

(3) $F(x,y)$ 关于 x, y 分别右连续



$F(2,2)-F(2,0)+F(0,0)-F(0,2)$

$= 1-1+0-1$

$= -1 < 0$

∴不能成为 $F(x,y)$

4. $F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv$

(1) $f(x,y)\ge 0$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = F(\infty,\infty)=1$

(3) 设 G 是 xOy 上的区域 $\quad P\{(x,y)\in G\} = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy$

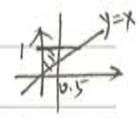
(4) $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y} = f(x,y)$

(5) $P\{X=a, Y=b\}=0 \quad P\{X=a, -\infty<Y<+\infty\}=0 \quad P\{-\infty<X<+\infty, Y=b\}=0$

§2 边缘分布 由联合分布函数 ⇒ 边缘分布函数

1. $F_X(x) = P\{X\le x\} = P\{X\le x, Y<+\infty\} = F(x,+\infty)$

$= \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\right]dx$



2. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$ $\quad$ (3) → 见后几页

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$

③ $P(X<0.5)$

先上下移

$= \int_0^{0.5}dx\int_x^1 8xy\,dy$

(4) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 8xy\,dy$

$= \int_x^1 8xy\,dy$

$= 4x(y^2)\big|_x^1$

怎么拆→ $= 4x(1-x^2)$

例. 设 r.v. (X,Y) 的联合 d.f 为

$f(x,y) = \begin{cases} kxy, & 0\le x\le y,\ 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

求 (1) k (2) $P(X+Y\ge 1)$ $P(X<0.5)$

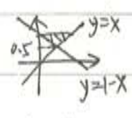
(3) $F(x,y)$

(4) 边缘 d.f 与边缘分布函数

解：(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$\Rightarrow k=8$

(2)



① $P(X+Y\ge 1)$ → 先左右移 怎么移

$= \int_{0.5}^{1}dy\int_{1-y}^{y} 8xy\,dx$

$= \frac{5}{6}$

3. 常用连续型二维随机变量.

① 均匀分布

定义：设 G 是有界区域，面积为 A，若 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & 其他\end{cases}$ 则 (X,Y) 服从 G 上的~

<1> 若 (X,Y) 服从 G 上的均匀分布，$\forall G_1\subseteq G$，设 G_1 的面积为 A_1.

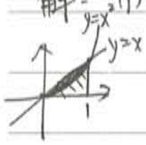
则 $P((X,Y)\in G_1)=\frac{A_1}{A}$

<2> 边平行于坐标轴的矩形域上的均匀分布的边缘分布仍为均匀分布

例1：设 $(X,Y)\sim G$ 上的均匀分布

$G=\{(x,y)\mid 0\le y\le x,\ 0\le x\le 1\}$，求 (1) $f(x,y)$ (2) $P(Y>X^2)$.

解：(1) $A=\frac{1}{2}$



$\therefore f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le y\le x,\ 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

(2) $A_1=\iint\limits_{G_1} 2\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} 2\,dy=2\int_0^1 (x-x^2)\,dx$

$=2\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\cancel{\frac{1}{3}}\ \frac{1}{6}$

$P(Y>X^2)=\frac{A_1}{A}=\frac{1}{3}$

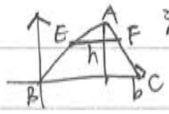
或直接 $P(Y>X^2)=\iint\limits_{G_1} 2\,dxdy$.　找出积分区域

② 二维正态分布

其边缘分布仍为正态分布

例2：在高为 h 的 △ABC 中任取一点 M，点 M 到 AB 的距离为 X，求其密度函数 $f(x)$

解：



法1：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{hb}, & \triangle内\\ 0, & else\end{cases}$

$\therefore f(x)=f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{hb}\,dx$.

法2：$F(x)=P(X\le x)=\frac{S_{EFCB}}{S_{\triangle ABC}}$

$f(x)=F'(x)$

§3 条件分布

离散：1. 定义：对于固定的 j，若 $P\{Y=y_j\}>0$ 则 ~~$P\{x_i\mid y_j\}$~~ $P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}$

为 $Y=y_j$ 条件下 X 的条件分布律

连续：

2. ①条件概率密度（$f_Y(y)>0$ 时）：$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

$f_Y(y)=0$ 时 $f_{X|Y}(x|y)=0$

② $F_{X|Y}(x|y)=P\{X\le x|Y=y\}=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$

$\int_{-\infty}^{x}\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$

$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$.

$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(x|y)dy$

§ 相互独立的随机变量

1. 定义：若 $P\{X\le x, Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\}$ 即 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

则 X与Y相互独立

(1) 连续：X与Y相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

(2) 离散：所有可能的值 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$

应用：证明X与Y相互独立 ⇒ 看 $f_X(x)f_Y(y)=f(x,y)$ 是否成立

• 具有可加性的2个离散型概率分布

1. $X\sim B(n_1,p)$，$Y\sim B(n_2,p)$

$\Rightarrow X+Y\sim B(n_1+n_2,p)$ 　　$B(n_1+n_2,p)$.

2. $X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$

$\Rightarrow X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

3 两个随机变量的函数的分布

(一) $Z=X+Y$ 分布

(1) $f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$

or $f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$

(2) 若 X 与 Y 相互独立

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

f_X 和 f_Y 的卷积公式 $f_X * f_Y=$

eg. 已知 (X,Y) 的联合 d.f 为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & else\end{cases}$

$Z=X+Y$，求 $f_Z(z)$

解：法1：图形定限法 ✓

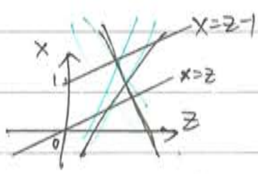
$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & else\end{cases}$

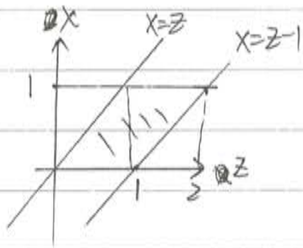
$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$

$=\int_0^1 1\cdot f_Y(z-x)dx$

$\because z-x\in(0,1)$

$\therefore z-1<x<z$





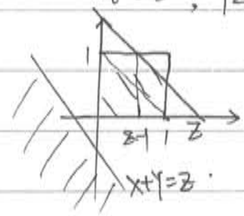
$\therefore f_Z(z)=\int_0^1 f_Y(z-x)dx=\begin{cases}0, & z<0 \text{ or } z>2\\ \int_0^z 1dx, & 0<z<1\\ \int_{z-1}^1 1dx, & 1<z<2\end{cases}$

$=\begin{cases}0, & z<0 \text{ or } z>2\\ z, & 0<z<1\\ 2-z, & 1<z<2\end{cases}$

法2：从分布函数出发

$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}$

$=\iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$



① $z<0$ 时

$F_Z(z)=0$

② $0<z<1$

$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x} 1dy=\frac{z^2}{2}\Rightarrow f_Z(z)=z$

③ $1\le z<2$ 时

$F_Z(z)=(z-1)+\int_{z-1}^1 dx\int_0^{z-x} 1\cdot dy$

$=z-1+\int_{z-1}^1 (z-x)dx$

$=2z-\frac{z^2}{2}-1$

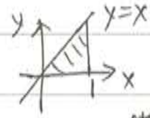
$\Rightarrow f_Z(z)=2-z$

④ $z>2$ 时 $F_Z(z)=1$

$\Rightarrow f_Z(z)=0$

eg2: 已知 (X, Y) 的联合 d.f. 为 $f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,\ 0<y<x\\ 0, & \text{else}\end{cases}$, $Z=X+Y$ 求 $f_Z(z)$.

解:



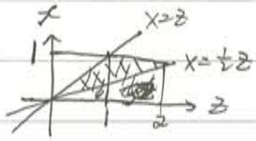
$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}3x\,dy=3x\int_0^x dy=3x^2$

$f_Y(y)=\int_0^1 3x\,dx=\frac{3}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{3}{2}$

$f_Z(z)=\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx}$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,dx$

$f(x,z-x)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,\ 0<y<x\\ 0, & \text{else}\end{cases}$



$0<z-x<x \Rightarrow \frac{z}{2}<x<z$,

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_{\frac{z}{2}}^{z}f(x,z-x)\,dx, & 0<z<1\\ \int_{\frac{z}{2}}^{1}f(x,z-x)dx, & 1<z<2\\ 0, & z<0 \text{ or } z>2\end{cases}$

$=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2\Big|_{\frac{z}{2}}^{z}=\frac{3}{2}\left(z^2-\frac{z^2}{4}\right)=\frac{9}{8}z^2, & 0<z<1\\ \frac{3}{2}x^2\Big|_{\frac{z}{2}}^{1}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{4}z^2\right), & 1<z<2\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

步骤: ① 根据 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,dx$

或 $=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$ 得出 $f_Z(z)$.

② 由 $z-x\in$(x的范围)得出 x-z 图形→

③ 由图形 给z划分, 得出 $f_Z(z)$表达式

(二) 商的分布: $Z=\frac{X}{Y}$, $Z=\frac{Y}{X}$

(1) $Z=\frac{Y}{X}$

$f_{\frac{Y}{X}}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x,xz)\,dx$

$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}f(z\cos\theta, z\sin\theta)d\theta$

(2) $Z=\frac{X}{Y}$

$f_{\frac{X}{Y}}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cancel{|x|}\,|y|\,f(yz,y)\,dy$.

(三) 积的分布 $Z=XY$

$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}\cdot f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx$.

(四) 平方和分布 $Z=X^2+Y^2$ $F_Z(z)=P\{X^2+Y^2\le z\}=\begin{cases}0, & z<0\\ \iint_{x^2+y^2\le z}f(x,y)\,dxdy, & z\ge 0\end{cases}$

$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}f(\sqrt{z}\cos\theta,\sqrt{z}\sin\theta)\,d\theta, & z\ge 0\end{cases}$

(五) 极值分布 $M=\max\{X,Y\}$ (Z), $N=\min\{X,Y\}$ (Z) 分布

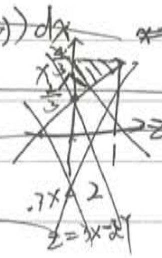
连续型： $F_{\min}(z) = 1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$ 　　离散型：直接计算

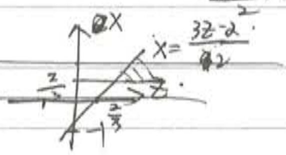
$F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z)$

eg. 已知 (X,Y) 的 $f(x,y)=\begin{cases} 3x, & 0<x<1,\ 0<y<x \\ 0, & \text{else}\end{cases}$，$Z=3X-2Y$，求 $f_Z(z)$

$3x = z+2y$ 　 $2y = 3x-z$.

解：





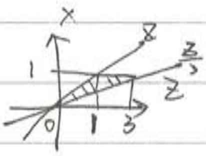
$\frac{3z-2}{2} = x$

$f_Z(z) = \int_{\frac{z}{3}}^{1} f\left(x, \frac{1}{2}(3x-z)\right)dx$

$0 < \frac{1}{2}(3x-z) < x$

$0 < 3x - z < 2x$

$\frac{z}{3} < x < z$



$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z<0 \text{ or } z>3 \\ \int_{\frac{z}{3}}^{z} \frac{1}{2} f\left(x, \frac{3x-z}{2}\right)dx & 0<z<1 \\ \frac{1}{2}\int_{\frac{z}{3}}^{1} 3x\,dx & 1<z<3 \end{cases}$

$= \begin{cases} 0 \\ \frac{3}{2}\left(z^2-\frac{z^2}{9}\right)\cdot\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\left(1-\frac{z^2}{9}\right)\cdot\frac{1}{2} \end{cases}$

$= \begin{cases} 0 \\ \frac{2}{3}z^2, & 0<z<1 \\ \frac{3}{4}-\frac{1}{12}z^2, & 1<z<3 \end{cases}$

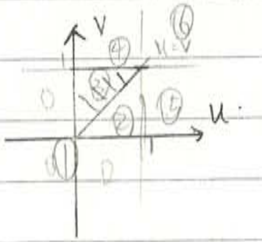
$z = ax+by+c \Rightarrow x = \frac{1}{a}(z-by-c)$

$f_Z(z) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{z-by-c}{a}, y\right)$

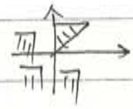
求二维随机变量分布函数.

① 连续 r.v. 将 $f(x,y)$ 取非0的区域画出. 将各边界延长. 再根据 $P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy$ 求出各小区域上的分布函数.

eg. $f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y,\ 0\le y\le 1\\ 0, & else\end{cases}$ 　求 $F(x,y)$.

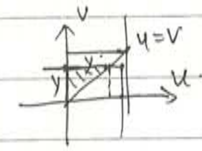


① $x<0$ 或 $y<0$

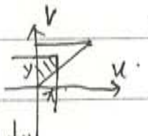


$F(x,y)=0$

② $0<x<1$, $0<y<x$



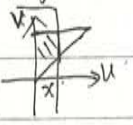
$$F(x,y)=\int_0^y du\int_u^y 8uv\,dv$$
$$=\int_0^y 8u\,du\int_u^y v\,dv$$
$$=8\int_0^y 8u\cdot\tfrac{1}{2}(y^2-u^2)du$$
$$=4\left(\tfrac{1}{2}u^2y^2-\tfrac{1}{4}u^4\right)\Big|_0^y=y^4$$



③ $0<x<1$, $x<y<1$

$$F(x,y)=\int_0^x du\int_u^y 8uv\,dv$$
$$=8\int_0^x u\,du\int_u^y v\,dv$$
$$=8\int_0^x\left(\tfrac{1}{2}uy^2-\tfrac{1}{2}u^3\right)du$$
$$=4\left(\tfrac{1}{2}u^2y^2-\tfrac{1}{4}u^4\right)\Big|_0^x=2x^2y^2-x^4$$

④ $y>1$, $0<x<1$



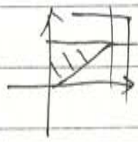
$$F(x,y)=\int_0^x du\int_u^1 8uv\,dv$$
$$=8\int_0^x u\cancel{du}\cdot\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}u^2\right)du$$
$$=4\int_0^x(u-u^3)du$$
$$=4\left(\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{4}x^4\right)=2x^2-x^4$$

⑤ $x>1$, $0<y<1$

同②

⑥ $x\ge 1$, $y\ge 1$

$F(x,y)=1$



注: 左下角区域肯定是0

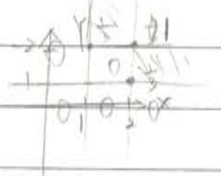
NO.　　DATE.

② 离散 r.v.

eg. 求 (X, Y) 的分布函数，已知 (X, Y) 的分布律如下：

Y\X	1	2
1	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

解：



$1 \le x < 2,\ y \ge 2 \to \frac{1}{3}$

$x \ge 2,\ y \ge 2$

$x \ge 2,\ y \ge 2 \to 1$

tips：① 最左下角 0

② 每个区域本身的概率为最左下角那个点的概率

~~总概率~~ $F(x,y)$ 为本身概率加左边及下边概率.

例题！

1、设 X_1, X_2 的分布律如下，且满足 $P\{X_1X_2=0\}=1$，则 $P\{X_1=X_2\}=$ 0

$X_{1,2}$	0	-1	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

解：$P\{X_1=X_2\}=P\{X_1=0, X_2=0\}+P\{X_1=1, X_2=1\}+P\{X_1=-1, X_2=-1\}$

① $\because P\{X_1X_2=0\}=1 \quad \therefore P\{X_1X_2\neq 0\}=0$

$\therefore P\{X_1=X_2\} \overset{②}{=} P\{X_1=0, X_2=0\} = P\{X_1=0\}-P\{X_1=0, X_2=-1\}-P\{X_1=0, X_2=1\}$

③ 未说 X, Y 相互独立. 不能按 $P\{X=n, Y=m\}=P\{X=n\}\cdot P\{Y=m\}$ 计算.

$\because P\{X_1=1\}=P\{X_1=1, X_2=1\}+P\{X_1=1, X_2=0\}+P\{X_1=1, X_2=-1\}$

$\frac{1}{4}=P\{X_1=1, X_2=0\}$

同理 $P\{X_1=0, X_2=-1\}=P\{X_1=0, X_2=1\}=\frac{1}{4}$

$\therefore P\{X_1=X_2\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$

2、某班车上车人数 X 服从 λ 的泊松分布，每位乘客中途下车的概率为 p，且下车与否相互独立，以 Y 表示下车人数. (1) 在发车时有 n 人条件下，中途 m 下车的 p

(2) 求 (X, Y) 的分布律.

解：(1) $P\{Y=m|X=n\}=C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \quad n \ge m \ge 0,\ n=1,2,\cdots$

条件概率 (2) $P\{X=n, Y=m\}=P\{Y=m|X=n\}\cdot P\{X=n\}=C_n^m\cdot p^m(1-p)^{n-m}\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^n}{n!}，0\le m\le n$

$p(-a<x<a)$
$=p(x<a)$
$-p(x\le -a)$

NO. 对立事件　DATE:

3. 2个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则 ____

A. $P\{X+Y\le 0\}=\frac{1}{2}$　　B. $P\{X+Y\le 1\}=\frac{1}{2}$

C. $P\{X-Y\le 0\}=\frac{1}{2}$　　D. $P\{X-Y\le 1\}=\frac{1}{2}$.

解：$X+Y\sim N(1,2)$　　$X-Y\sim N(-1,0)$

$\therefore \frac{(X+Y)-1}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$

$\therefore P\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}}\le 0\}=\frac{1}{2}$

即 $P\{X+Y\le 1\}=\frac{1}{2}$

$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 1\le x\le 3,\ 1\le y\le 3\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

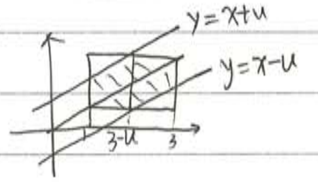
4. 设随机变量 X 和 Y 的联合分布是 $G\{(x,y)\mid 1\le x\le 3,\ 1\le y\le 3\}$ 上的均匀分布

试求 $U=|X-Y|$ 概率密度 $p(u)$

$Z=X-Y$.

解：$F(u)=P\{|X-Y|\le u\}=P\{0\le X-Y\le u\}+P\{0\le Y-X\le u\}$

$F_U(u)=P(|X-Y|<u)$
$=P(-u<X-Y<u)$
$=P(X-Y<u)$
$-P(X-Y<-u)$



$=2P\{0\le Y-X\le u\}$

$=2\cdot\frac{1}{4}\left[\int_1^{3-u}\int_x^{x+u}\frac{1}{4}dxdy+\int_{3-u}^{3}\int_x^{3}\frac{1}{4}dxdy\right]$

$=-\frac{1}{4}u^2+u$　　$(0<u<2)$

$P(X>u)$
$=1-P(X\le u)$

$p(u)=F'(u)=1-\frac{1}{2}u$

5. 设 X 与 Y 独立，其中 X 的分布律如下，Y 的概率密度为 $f(y)$，求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$

$Z=X-Y$.

X	1	2
p_k	0.3	0.7

$1<Y=X-Z<3$
$1+Z<X<3+Z$

解：设 $F_Y(y)$ 是 Y 的分布函数，由全概率公式

$G(u)=P\{X+Y\le u\}=0.3P\{X+Y\le u\mid X=1\}+0.7P\{X+Y\le u\mid X=2\}$

$=0.3P\{Y\le u-1\mid X=1\}+0.7P\{Y\le u-2\mid X=2\}$

$z\in(-2,0)$

$\because$ X、Y 独立 $\Rightarrow P\{Y\le y\mid X=x\}=P\{Y\le y\}$

$\int_1^{3+z}\frac{1}{4}dx$

$\therefore$ 上式 $=0.3P\{Y\le u-1\}+0.7P\{Y\le u-2\}$

$=\frac{1}{4}(2+z)$
$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}z$.

$=0.3F(u-1)+0.7F(u-2)$

$\therefore g(u)=G'(u)=0.3F'(u-1)+0.7F'(u-2)$

$=0.3f(u-1)+0.7f(u-2)$

NO. DATE.

n种常见随机变量的概率分布、期望、方差.

分布	概率分布	期望	方差
(0-1)分布	$P\{X=1\}=p$ $P\{X=0\}=1-p$	p	$p(1-p)$
$X\sim B(n,p)$ 二项分布 $\downarrow \lambda=np$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2\ldots$	np	$np(1-p)$
$X\sim P(\lambda)$ 泊松分布	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1,2\ldots$	λ	λ
均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{else}\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 参数是$\frac{1}{\theta}$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$	θ	θ^2
$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 正态分布	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

第4章 随机变量的数字特征

§数学期望（均值）

1、$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

2、性质

(1) $E(C)=C$

(2) $E(CX)=CE(X)$

(3) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

(4) X Y 相互独立 或不相关 $E(XY)=E(X)E(Y)$

§方差

1、$D(X)=E[(X-E(X))^2]=E(X^2)-E^2(X)$

2、标准差/均方差：$\sqrt{D(X)}$，记为 $\sigma(X)$

3、性质：(1) $D(C)=0$

(2) $D(CX)=C^2D(X)$

(3) $D(X+C)=D(X)$

(4) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\{(X-E(X))(Y-E(Y))\}$　$2cov(X,Y)$　　当X,Y相互独立或不相关时 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

(5) $D(X)=0$ 的充要条件是 $P\{X=E(X)\}=1$

§切比雪夫不等式

$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$　　$\mu=E(X)$　$\sigma=D(X)$，ε为任意正数。

$\Leftrightarrow P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

§协方差

1、定义：$cov(X,Y)=E\{(X-E(X))(Y-E(Y))\}=E(XY)-E(X)E(Y)$

推论：
$$\begin{cases}cov(X,Y)=cov(Y,X)\\ cov(X,X)=D(X)\end{cases}$$

2、性质：(1) $cov(aX,bY)=ab\,cov(X,Y)$

(2) $cov(X_1+X_2,Y)=cov(X_1,Y)+cov(X_2,Y)$

§ 相关系数

1. 定义：$\rho_{XY} = \dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

2. 定理：(1) $|\rho_{XY}| \leq 1$

   (2) $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow P\{Y = aX + b\} = 1$

$$\begin{cases} \text{完全相关 } |\rho| = 1 \\ \text{完全不相关 } |\rho_{XY}| = 0 \end{cases}$$

3. 相互独立 $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ 不相关

   例外：(X,Y) 服从二维正态分布时：相互独立 $\Leftrightarrow$ 不相关.

   此时由 $\rho = 0$ 验证 X、Y 是否相互独立很有用

NO.　　　DATE.

例 1. 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲装有3好3次品，乙箱中仅有3件合格品

(1) 乙箱中次品件数的数学期望

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

(1)

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

$$E(X)=\frac{9+2\times9+3}{20}=\frac{3}{2}$$

(2) $P\{\underset{A=}{是次品}\}=P\{A|X=0\}\cdot P\{X=0\}+P\{A|X=1\}\cdot P\{X=1\}+P\{A|X=2\}\cdot P\{X=2\}+P\{A|X=3\}\cdot P\{X=3\}$ → 全概率公式

$$=\frac{1}{20}\cdot0+\frac{9}{20}\cdot\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\cdot\frac{3}{6}$$

$$=\frac{1}{4}$$

注 (1)也可: $X_i=\begin{cases}1, & 从甲从取出的第i件是次品\\ 0, & \cdots\cdots 合格品.\end{cases}$

二项分布常用此"分解法"

X_i	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\because X=X_1+X_2+X_3$

$\therefore E(X)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=3\times1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

2、X与Y的联合分布在以(0,1)(1,0)(1,1)为顶点的三角形区域上服从均匀分布，求 U=X+Y 的方差

解: $D(U)=\underline{D(X+Y)=D(X)+D(Y)+\mathrm{cov}(X,Y)}$

$$=E(X^2)-E^2(X)+E(Y^2)-E^2(Y)+E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le x\le1,\ 0\le y\le1,\ x+y\ge1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$$f(x)=\int_{1-x}^{1}2\,dy$$

$$=2x\quad(0<x<1)$$

$$f(y)=\int_{1-y}^{1}2\,dx$$

$$=2y\quad(0<y<1)$$

$$E(X)=\int_0^1 2x\cdot x\,dx=\frac{2}{3}=E(Y)$$

$$E(X^2)=\int_0^1 2x^2\cdot x\,dx=\frac{1}{2}=E(Y^2)$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_{1-x}^{1}2xy\,dx\,dy=\frac{5}{12}$$

$$D(X+Y)=\frac{1}{18}$$

NO. DATE.

3. 设 U 在 $[-2,2]$ 服从均匀分布，$X=\begin{cases}-1, & U\le -1\\ 1, & U>-1\end{cases}$，$Y=\begin{cases}-1, & U\le 1\\ 1, & U>1\end{cases}$

(1) 求 X、Y 的联合概率分布

(2) $D(X+Y)$

$-2\ -1\ 1\ 2 \to u$

(1) $(X,Y)=(1,1),(1,-1)\ (-1,1)\ (-1,-1)$.

$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>-1,U>1\}=\frac{1}{4}$

$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-1,U\le 1\}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\le -1,U>1\}=0$

$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\le -1,U\le 1\}=\frac{1}{4}$

(2) $U=X+Y$. $D(X+Y)=E[(X+Y)^2]+E^2(X+Y)$. 前提：X与Y不独立

$(X+Y)$	2	0	-2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$(X+Y)^2$	4	0
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E(X+Y)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

$E[(X+Y)^2]=4\times\frac{1}{2}+0=2$

$\therefore D(X+Y)=2+0=2$

4. 将一枚硬币重复掷n次，以X和Y分别表示正面向上和反面向上的次数，则X和Y的相关系数 = ____

解 $X\sim B(n,p)$ $Y\sim B(n,1-p)$. $\rho_{XY}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

$D(X)=np(1-p)=D(Y)=np(1-p)$

根据关系 ① $\because X+Y=n$

$\therefore D(X+Y)=D(n)=0$

$E(Y)=n(1-p)=n-np$
$=n-E(X)$.

② $cov(X,Y)$ 联想 $D(X+Y)$.

又 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2cov(X,Y)$ 或 $cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$\therefore cov(X,Y)=-\frac{D(X)+D(Y)}{2}=-np(1-p)$

$=E\{[X-E(X)][n-X+E(X)-n]\}$

$\rho_{XY}=\frac{-D(X)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(X)}}=-1$

$=-E\{[X-E(X)]^2\}$

$=-D(X)$

典例　　NO.　　DATE.

5. 将 n 只小球（1~n号）随机的放进 n 只盒子（1~n号）中去，一只盒子装一只球，若一只球装入同号的盒子中称一个配对，计 X 为总的配对数，求 $E(X)$

解：设 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{球入第}i\text{盒}\\ 0, & \text{未配对}\end{cases}$

X_i	1	0
p	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$

$\because X=X_1+\cdots+X_n$

$\therefore E(X)=E(X_1)+\cdots+E(X_n)$

$=\frac{1}{n}\times n=1$

6. 若有 n 把看上去一样的钥匙，其中只有一把能打开门上的锁，用它们去试开门上的锁，设取到每只钥匙是等可能的，每试一次未成功则除去该钥匙，试用下面两种方法求试开次数 X 的期望

(1) 写出 X 分布律

(2) 不写 X 分布律

解：(1) $p\{X=1\}=\frac{1}{n}$

$p\{X=2\}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}$

$\vdots$

$p\{X=i\}=\frac{1}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n)$

一般等差数列求和公式 $=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$

$=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

$E(X)=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{(1+n)n}{2}=\frac{1+n}{2}$

(2) 设 $X_i=\begin{cases}i, & \text{第}i\text{次打开}\\ 0, & \text{第}i\text{次未打开}\end{cases}$

X_i	i	0
p	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$

$E(X_i)=\frac{i}{n}$

$\therefore E(X)=E(X_1)+\cdots+E(X_n)$

$=\frac{1}{n}(1+\cdots+n)=\frac{n+1}{2}$

NO.　　　　DATE.

7. 设X为随机变量，c为常数，证明$D(X) < E\{(X-c)^2\}$ 对于 $c \neq E(X)$（由于$D(X)=E[(X-E(X))^2]$ 上式表明 $E\{(X-c)^2\}$ 当 $c=E(X)$ 时取最小值）

解：$E\{(X-c)^2\} = E\{X^2-2cX+c^2\} = E(X^2)-2cE(X)+E(c^2)$

$= E(X^2)(-2cE(X)+E^2(X)+E(c^2))-E^2(X)$

$= D(X)+[E(X)-c]^2$

$= E\{[X-E(X)]^2\}+[E(X)-c]^2 > D(X)$

8. 设X服从几何分布，分布律为$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$，$k=1,2,\dots$ 其中$0<p<1$是常数，求$E(X)$，$D(X)$

解：$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = \cancel{\left(\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^k\right)' = \left(p\cdot\frac{(1-p)}{1-(1-p)}\right)' = \left(\frac{p-p^2}{p}\right)' = (1-p)'}$

注意：只有一个是"x"（变量）

$= \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} pq^k\right)' = \left(p\cdot\frac{q}{1-q}\right)' = p\cdot\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$

$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k^2pq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)pq^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1}$

$= pq\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + \frac{1}{p}$

$= pq\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)'' + \frac{1}{p}$

$= pq\left(\frac{q}{1-q}\right)'' + \frac{1}{p}$

$= pq\cdot\left[\frac{1-q+q}{(1-q)^2}\right]' + \frac{1}{p}$　　$= pq\left[\frac{+2(1-q)}{(1-q)^4}\right] + \frac{1}{p}$

变量完了就不要再换.

$= \cancel{pq\left(\frac{1}{p^2}\right)' + \frac{1}{p}}$　　$= pq\cdot\frac{2p}{p^4}+\frac{1}{p}$

$= \cancel{\frac{-2q}{p^2}+\frac{1}{p} = \frac{p-2q}{p^2}} = \frac{p-2(1-p)}{p^2}$　　$= \frac{2(1-p)+p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$

9. 卡车运水泥，设每袋水泥的重量 $X \sim N(50, 2.5^2)$，问最多装多少袋使总重超过2000的概率不大于0.05？

解：设$Y = X_1+\cdots+X_n$ 则 $E(Y)=E(X_1)+\cdots+E(X_n)=50\times n$.　$D(Y)=D(X_1)+\cdots+D(X_n)$
$= n\times 2.5^2$

则 $Y\sim N(50n, 2.5^2 n)$

$\therefore P\{Y \geq 2000\} \leq 0.05$

$\Rightarrow P\{Y \leq 2000\} \geq 0.95$

$P\left\{\frac{Y-50n}{2.5\sqrt{n}} \leq \frac{2000-50n}{2.5\sqrt{n}}\right\} \geq 0.95$

$\Phi\left(\frac{2000-50n}{2.5\sqrt{n}}\right) \geq 0.95 = \Phi(1.645)$

$\therefore \frac{2000-50n}{2.5\sqrt{n}} \geq 1.645$

解得 $n=39$.

NO. DATE.

10. 对2个随机变量 V.W. 若 $E(V^2)$、$E(W^2)$ 存在，证明 $[E(VW)]^2 \le E(V^2)E(W^2)$

解：设 $g(t) = E[(V+tW)^2] = E[V^2+2tVW+t^2W^2] = E(V^2) + 2tE(VW) + t^2E(W^2)$

$\because$ $g(t) \ge 0$ 恒成立 且 $E(W^2) \ge 0$

$\therefore$ $\Delta = 4E^2(VW) - 4E(V^2)E(W^2) \le 0$

即 $E^2(WV) \le E(V^2)E(W^2)$

NO. DATE.

第六章 样本及抽样分布

§ 随机样本 对总体 X 进行 n 次重复的独立的观察得到 n 个结果 $X_1, X_2, \dots, X_n$

性质：

(1) $X_1, X_2, \dots, X_n$ 都与总体 X 具有相同的分布

(2) $X_1, X_2, X_3 \dots X_n$ 相互独立

(3) $F(x_1, x_2, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$ $\quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$

§ 抽样分布 → 统计量的分布

一. n个常用统计量 → 对样本进行一定的函数变换

1. 样本平均值：$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

2. 样本方差：$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$

3. 样本标准差：$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}$

4. 样本k阶(原点)矩：$A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k$，$k = 1, 2, \dots$

5. 样本k阶中心矩：$B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^k$，$k = 1, 2, \dots$

二. 常用统计量的分布

(一) χ^2分布

1. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的样本，则称统计量 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布. 记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

2. 可加性：$A \sim \chi^2(n_1)$，$B \sim \chi^2(n_2)$ 且 A, B 相互独立，则 $A+B \sim \chi^2(n_1+n_2)$

期望与方差：$E(\chi^2) = n$，$D(\chi^2) = 2n$

注：$X \sim N(0,1)$ 则 $X^2 \sim \chi^2(1)$

(二) t分布

1. 设 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$ 且 X, Y 相互独立，则称 $t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t分布

即 $t \sim t(n)$

性质：(1) $F\sim F(n,m)$ 则 $\frac{1}{F}\sim F(m,n)$

(2) $F(n,m)$ 的 α 分位数 $F_\alpha(m,n)$ 有表可查

$F_\alpha(m,n)=\frac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}$

(三) F分布

设 $U\sim\chi^2(n_1)$，$V\sim\chi^2(n_2)$ 且 $U.V$ 相互独立．则 $F=\frac{U/n_1}{V/n_2}$ 服从自由度为 (n_1,n_2) 的F分布，记为 $F\sim F(n_1,n_2)$

(四) 正态总体的样本均值与样本方差的分布

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\bar{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$，则：

1. $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$
2. (1) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$　　$E(S^2)=D(X)$

   (2) $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立　　$D(\bar{X})=\frac{1}{n}D(X)$．
3. $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

eg. 设 $X_1,X_2,X_3,\dots,X_9$ 是来自正态总体的简单随机样本，$Y_1=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_6}{6}$

$Y_2=\frac{X_7+X_8+X_9}{3}$，$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2$，$Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$．证明 Z 服从自由度为2的t分布

解：$Y_1\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{6})$，$Y_2\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{3})$

设 $Y=Y_1-Y_2$，则 $Y\sim N(0,(\frac{1}{6}+\frac{1}{3})\sigma^2)$ 即 $Y\sim N(0,\frac{1}{2}\sigma^2)$

$\because 2S^2/\sigma^2\sim\chi^2(2)$　　$\therefore\frac{\sqrt{2}Y}{\sigma}\sim N(0,1)$

设 $U=\frac{2S^2}{\sigma^2}$

~~$\therefore\frac{Y}{\sqrt{\frac{U}{2}}}=\frac{Y_1-Y_2}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}}=\frac{\sigma(Y_1-Y_2)}{S}$~~

$\therefore\frac{\sqrt{2}Y/\sigma}{\sqrt{U/2}}=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)/\sigma}{\sqrt{S^2/\sigma^2}}=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}\sim t(2)$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$$

第七章 参数估计

§点估计

§矩估计法

参数 $\theta_1,\dots,\theta_n$ 未知

(一) $\begin{cases} \mu_1 = E(X) = g(\theta_1,\dots,\theta_n) \\ \mu_2 = E(X^2) = f(\theta_1,\dots,\theta_n) = D(X)+E^2(X) \\ \vdots \\ \mu_n = E(X^n) = h(\theta_1,\dots,\theta_n) \end{cases}$

(二) 由方程组解得 $\begin{cases} \theta_1 = q(\mu_1,\dots,\mu_n) \\ \vdots \\ \theta_n = z(\mu_1,\dots,\mu_n) \end{cases}$

(三) 将 $\mu_1 = A_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　$\mu_2 = A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \cdots$ 代入(二)式得到 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$

注：$A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

eg. 书 P151

§最大似然估计法

(一) $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta)$

(二) 令 $\frac{d}{d\theta}L(\theta)=0$ 解得 $\hat{\theta}$　　注：忽略常数因子不影响估计值.

$\because$ $L(\theta)$ 与 $\ln L(\theta)$ 在同一处取极值

$\therefore$ 也可令 $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0$.

不变性 (简单函数下) 最大似然估计值的不变性

eg. 求得 $\hat{\sigma}^2$，再求 $\hat{\sigma}$ 时，$\because$ $\sqrt{\sigma^2}$ 是具有单值反函数的函数

$\therefore$ 可直接 $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$

§基于截尾样本的最大似然估计

1. 定数截尾样本　$\hat{\theta} = \frac{S(t_m)}{m} = \frac{t_1+t_2+\cdots+t_m+(n-m)t_m}{m}$　t_m 为 t_m 时间 m 个产品失效；m 为定的数

2. 定时截尾样本　$\hat{\theta} = \frac{S(t_0)}{m} = \frac{t_1+t_2+\cdots+t_m+(n-m)t_0}{m}$　t_0 为定的时，m 为 t_0 时间内失效的个数.

NO.　　　　DATE.

§ 估计量的评选标准

(一) 无偏性

若 $E(\hat{\theta})=\theta$ 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量

题型：证明 X 是 θ 的无偏估计量.

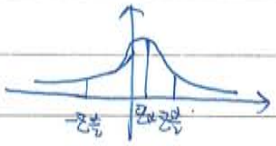
解法：只需说明 $E(X)=\theta$ 即可

(二) 有效性

若 $D(\hat{\theta}_1) \le D(\hat{\theta}_2)$ 则 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.

§ 正态总体均值与方差的区间估计

(一) 单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的情况



1、均值 μ 的置信区间

(1) σ^2 为已知　$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$\therefore P\left\{\left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha.$

(2) σ^2 为未知　$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$P\left\{\left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha.$

2、方差 σ^2 的置信区间

X (1) μ 已知　$Q=\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$

$P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) < Q < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right\}=1-\alpha.$

注：χ^2 与 F 分布密度函数不对称．取 $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

(2) μ 未知　$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$

$P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha.$

NO.　　　　DATE.

三) 两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况

1. $\mu_1-\mu_2$

(1) σ_1^2,σ_2^2 已知　　$Z=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$

$$P\{|Z|<Z_{\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha.$$

(2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知　　$t=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$　　$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

$$P\{|t|<t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\}=1-\alpha.$$

(3) σ_1^2,σ_2^2 未知，$n,m>50$

(4) σ_1^2,σ_2^2 未知，$n=m$

2. $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

(μ_1,μ_2 未知)　$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

$$P\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)<F<F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)\}=1-\alpha.$$

四、(0-1) 分布参数的区间估计

$Z=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-p}{\sqrt{\frac{1}{n}p(1-p)}}\sim N(0,1)$

$\therefore P\{|Z|\le Z_{\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha.$

由 $|Z|\le Z_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow Z^2\le Z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \Rightarrow (n+Z_{\frac{\alpha}{2}}^2)p^2-(2n\bar{x}+Z_{\frac{\alpha}{2}}^2)p+n\bar{x}^2<0$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1=\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{b^2-4ac}) \\ p_2=\frac{1}{2a}(-b+\sqrt{b^2-4ac}) \end{cases}$$

NO. DATE.

5 单侧置信区间

eg. σ已知 求μ的$1-\alpha$的置信区间上限、下限.

$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$P\{Z > Z_{1-\alpha}\} = 1-\alpha \Rightarrow \bar{\mu} < \cdots$

$P\{Z < Z_{\alpha}\} = 1-\alpha \Rightarrow \underline{\mu}$

$(Z_{1-\alpha}, Z_{\alpha})$

$t_{1-\alpha}(n) = -t_{\alpha}(n)$ $(\chi^2_{1-\alpha}, \chi^2_{\alpha})$

$F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \frac{1}{F_{\alpha}(n_2,n_1)}$ $(t_{1-\alpha}(n), t(\alpha))$